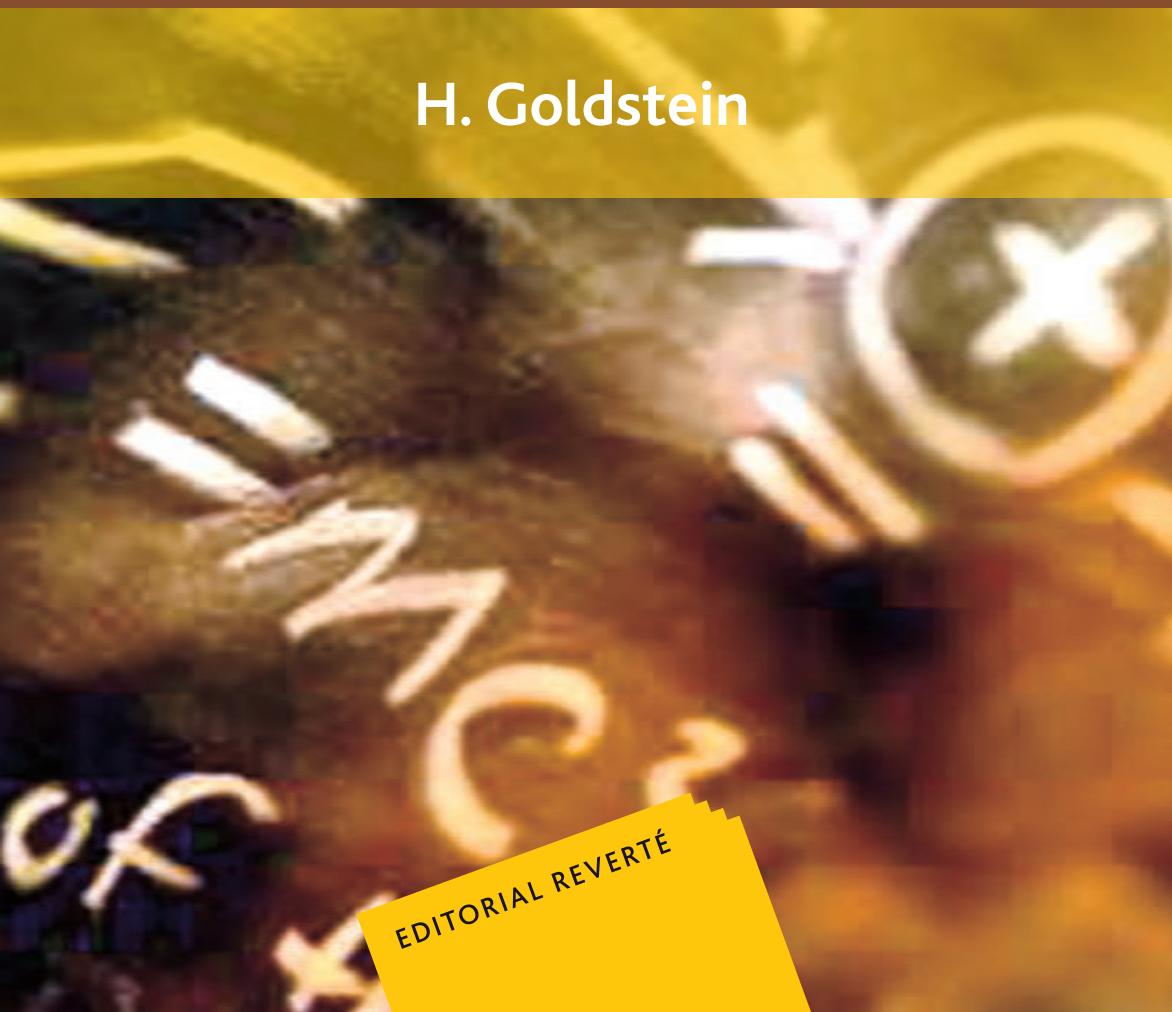
Mecánica Clásica

H. Goldstein



EDITORIAL REVERTÉ

En memoria de
LOUIS J. KLEIN
profesor y amigo

Mecánica Clásica

H. Goldstein

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:
Classical Mechanics, Second Edition

Edición original en lengua inglesa publicada por:
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, U.S.A.

Versión española por:
Dr. Julián Fernández Ferrer
Catedrático de la Universidad Politécnica de Barcelona
Fellow ofthe Institute ofMathematics and its Applications

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1987
ISBN: 978-84-291- 4306-5

Edición e-book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2018
ISBN: 978-84-291-9457-9

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Fax: (34) 93 419 51 89
E-mail: reverte@reverte.com
www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, queda rigurosamente prohibida, salvo excepción prevista en la ley. Asimismo queda prohibida la distribución de ejemplares mediante alquiler o préstamo públicos, la comunicación pública y la transformación de cualquier parte de esta publicación (incluido el diseño de la cubierta) sin la previa autorización de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto a los citados derechos.

Prólogo a la segunda edición

La perspectiva de una segunda edición de Mecánica Clásica, *casi treinta años después de su publicación inicial, ha dado lugar a dos tipos de reacciones casi contradictorios. Por una parte, se reivindica que el adjetivo «clásica» implica que el campo está completo, cerrado, totalmente fuera de las corrientes de la investigación en Física. Además, la primera edición ha recibido el favor de una utilización continua desde que se publicó. ¿Por qué, pues, una segunda edición? La reacción contraria ha sido que ya era hora de que saliera una segunda edición. Más importante que los cambios introducidos en los temas tratados (que han sido considerables) ha sido la revolución en la actitud hacia la Mecánica clásica en relación con otras áreas de la Ciencia y la Tecnología. Cuando apareció la primera edición, formaba parte de un movimiento que rompía con las viejas formas de enseñar la Física. Pero lo que en 1950 eran riesgos audaces son hoy en día lugares comunes que a la generación actual se les antojan pasados de moda. La presentación de la Mecánica clásica necesita cambios radicales.*

Al preparar esta segunda edición he intentado seguir un camino intermedio entre esas dos actitudes. He intentado conservar, todo lo posible, las ventajas de la primera edición (tal como las veo) al tiempo que doy cuenta de los desarrollos del propio tema, su posición en la carrera y su aplicación a otros campos. Lo que ha salido es una revisión completa de la primera edición. Difícilmente encontraremos una página del texto que no se haya retocado. Los cambios han sido de diversos tipos:

Errores (algunos de bulto) que he captado o que me han sido señalados, se han corregido, desde luego. Espero que no se hayan introducido muchos en la materia revisada.

El capítulo referente a las oscilaciones pequeñas se ha trasladado desde su anterior posición en que era el penúltimo y se ha situado inmediatamente detrás del Capítulo 5 referente al movimiento del cuerpo rígido. Esta situación parece más adecuada a la manera actual de impartirse los cursos de Mecánica. Parte de la materia relativa a la formulación de Hamilton ha tenido, por tanto, que sacarse y llevarla más adelante, a lo que constituye el Capítulo 8 actual.

Se ha añadido un nuevo capítulo referente a la teoría de perturbaciones (Capítulo 11). El último capítulo, referente a sistemas continuos y campos se ha ampliado mucho, cumpliendo la promesa implícita hecha en el Prólogo de la primera edición.

En todo el libro se han añadido nuevos apartados, que van desde uno en el Capítulo 3 acerca del teorema de Bertrand para los potenciales de fuerzas centrales que dan lugar a órbitas cerradas, hasta el apartado final del Capítulo 12 que trata el teorema de Noether. En su mayor parte, estos apartados contienen materia totalmente nueva.

En diversos apartados, se han sustituido razonamientos y demostraciones por otros nuevos que parecen más sencillos y comprensibles, p. ej., la demostración del teorema de Euler en el Capítulo 4. En ocasiones, alguna línea de razonamiento presentada en la primera edición se ha complementado con una manera diferente de enfocar el problema. El ejemplo más importante es la introducción del método matricial para las ecuaciones canónicas, en paralelo con la antigua técnica de las funciones generadoras. De nuevo, aun manteniendo el convenio original de los ángulos de Euler, se mencionan otros convenios, incluso el común en Mecánica cuántica y se dan fórmulas detalladas en un apéndice.

Fruto de la larga experiencia en la enseñanza de cursos basados en el libro es el haber aumentado el número de ejercicios al final de cada capítulo, que ha quedado multiplicado por un factor superior a dos y medio. La bibliografía ha sufrido un aumento semejante que refleja la aparición de muchos textos y monografías de gran valor durante el tiempo transcurrido desde la primera edición. En deferencia a —pero no de acuerdo con— el actual olvido de las lenguas extranjeras en la educación en Estados Unidos, se han reducido al mínimo las referencias a libros escritos en idiomas extranjeros.

La elección de los temas conservados y de la nueva materia añadida refleja hasta cierto punto mis opiniones e intereses personales y al lector podría gustarle más una selección diferente. Como exigiría demasiado espacio (y sería muy pesado) tratar las razones motivadoras relativas a cada tema, debo comentar algunos de los principios generales que han regido mis decisiones. La cuestión de la elección de las técnicas matemáticas a emplear es fastidiosa. La primera edición intentaba hacer de vehículo para presentar herramientas matemáticas de amplia utilidad con las que pudiera no estar familiarizado el estudiante. En la presente edición la actitud es más que una precaución. Es mucho más probable ahora que hace treinta años que el estudiante se enfrente a la Mecánica con una buena base en manipulación de matrices. A pesar de todo, se ha conservado el apartado referente a propiedades de las matrices en el Capítulo 4 e incluso se ha ampliado, a fin de proporcionar una referencia conveniente de las fórmulas y técnicas necesarias. Los conocedores del tema pueden pasar por alto el apartado, si no lo necesitan. En cambio, se ha introducido muy poco de Matemática moderna. La propiedades elementales de la teoría de grupos se mencionan en distintos puntos del libro. En los Capítulos 6 y 7 se presta brevemente atención a la manipulación de tensores en espacios no euclídeos. Por lo demás, el nivel matemático de esta edición viene a ser el mismo que el de la primera. Es suficientemente adecuado para el contenido físico del libro y en la carrera existen otros medios para adquirir la Matemática necesaria en otras ramas de la Física. En particular, la «Matemática nueva» de la Física teórica se ha excluido deliberadamente. No se hace mención de variedades o difeomorfismos, de haces de fibras tangentes o de toros invariantes. Existen ciertas

áreas muy especializadas de la Mecánica clásica en donde son útiles y quizá esenciales las poderosas herramientas del Análisis global y de la Topología diferencial. No obstante, no veo claro que contribuyan a la comprensión de la Física de la Mecánica clásica al nivel que se da en esta edición. Introducir estos conceptos matemáticos y sus aplicaciones inflarían demasiado el libro y probablemente sólo serviría para oscurecer la Física. La Física teórica tiende a lo contrario, no es sólo Matemáticas.

En línea con esta actitud, se ha conservado el espacio complejo de Minkowski en la mayor parte del tratamiento de la Relatividad restringida a fin de simplificar su tratamiento matemático. Las bases de esta decisión (que nos damos cuenta va en contra de la moda actual) se dan en detalle en las páginas 360-361.

Cierto es que la Mecánica clásica actual está lejos de ser un tema cerrado. Las tres últimas décadas han visto la floración de nuevos desarrollos en Mecánica clásica, el abordaje de nuevos problemas y la aplicación de las técnicas de la Mecánica clásica a cuestiones de largo alcance de la Física y la Química. Evidentemente, no sería posible incluir aquí el tratamiento de todos esos desarrollos. Las razones son varias. Las limitaciones de espacio son, evidentemente, importantes. Además, novedades atractivas de la investigación corriente resultan, a menudo, efímeras y tienen muy corta vida. Y ciertas aplicaciones exigen una base demasiado extensa en otros campos, tales como la Física del estado sólido o la Química física. La selección realizada representa un compromiso personal. Las aplicaciones que permiten una descripción sencilla y proporcionan nuevos puntos de vista se incluyen con cierto detalle. Otras sólo se describen brevemente, con suficientes referencias que permitan al estudiante satisfacer su naciente curiosidad. En algunos casos he intentado describir casi sólo con palabras el estado actual de la investigación de un tema, sin matemáticas, a fin de proporcionar al estudiante una visión global que le guíe en una futura investigación. Hay una área omitida que merece especial mención —las oscilaciones alineales y las cuestiones de estabilidad inherentes a ellas. Es incuestionable la importancia del tema, pero creo que el tratamiento adecuado del mismo necesita de todo un libro.

Con todas las restricciones y una selección cuidadosa, el libro ha alcanzado un volumen probablemente excesivo para desarrollarse en un solo curso. Se ha escrito un cierto número de apartados de manera que se puedan suprimir sin afectar a desarrollos posteriores y se han marcado en consecuencia. Sin embargo, creemos que no es necesario marcar «pistas» especiales a lo largo del libro. Cada profesor, identificado con sus propias necesidades, está mejor facultado para recoger y elegir lo que cree debe incluirse en los cursos que imparte.

Quedo muy agradecido a muchas personas que han contribuido a mi formación en Mecánica clásica en los treinta años anteriores. A mis colegas los Profesores Frank L. DiMaggio, Richard W. Longman y al Decano Peter W. Likins les agradezco muchos valiosos comentarios y discusiones. Mi agradecimiento a Sir Edward Bullard por corregirme un error grave de mi primera edición, especialmente por lo simpática y graciosamente que lo hizo. El Profesor Boris Garfinkel de la Yale University leyó y comentó amablemente varios capítulos e hizo todo lo posible para iniciarme en los misterios de la Mecánica celeste. A lo largo de los años he sido un receptor agradecido de las valiosas correcciones y sugerencias de muchos amigos y extraños entre los cuales debo mencionar en particular a los Drs. Eric Ericsen (de la Universidad de Oslo), K. Kalikstein, J. Neuberger, A. Radkowsky y a Mr. W. S. Pajes. Sus contribuciones han enriquecido el

libro, si bien solamente yo soy responsable de los errores y falsas interpretaciones. Quisiera añadir mi agradecimiento a todos los autores de trabajos acerca de Mecánica clásica aparecidos en las tres últimas décadas en el American Journal of Physics *cuyas páginas espero haber leído con provecho.*

El equipo de Addison-Wesley me ha ayudado y animado de manera uniforme. Deseo dar especialmente las gracias a Mrs. Laura R. Finney por su paciencia en lo que debe haberle parecido un proceso interminable y a Mrs. Marion Howe por su amable y persistente colaboración en la lucha por lograr una página impresa aceptable.

A mi padre, Harry Goldstein ז"ל, *le debo más que palabras que puedan describir su devoción y guía a lo largo de toda la vida. Pero quiero, al menos ahora, hacer lo que él no me permitió durante su vida —reconocer la ayuda de su crítica incisiva y la edición meticulosa de la primera edición. Sólo espero que la presente edición refleje aún parte de su insistencia en una escritura lúcida y concisa.*

Quiero dedicar esta edición a los que atesoro por encima de todo en este mundo y que han dado un significado a mi vida —a mi esposa, Channa, y a nuestros hijos, Penina Perl, Aaron Meir y Shoshanna.

Y, sobre todo, quiero manifestar el agradecimiento de mi corazón, en las palabras de Daniel (2:23):

לְךָ אֱלֹהֵי אֲבוֹתַי מְהֻלָּל
וּמְשֻׁבָּח אַתָּה שִׁמְךָ לְעוֹלָם וָעֶד

Kew Gardens Hills, New York HERBERT GOLDSTEIN

Prólogo a la primera edición

Un curso superior de Mecánica clásica ha sido siempre una parte de muchos créditos de una carrera de Física. Sin embargo, la función actual de un tal curso podría ser fuertemente cuestionada. No presenta nuevos conceptos físicos al estudiante. No le lleva directamente a la investigación en Física. Ni le ayuda, en gran manera, a resolver los problemas prácticos de mecánica que encuentra en el laboratorio.

A pesar de todo esto, la Mecánica clásica sigue siendo una parte indispensable de la formación del físico. Desempeña un papel doble en la preparación del estudiante para el estudio de la Física moderna. Así, la técnica de las variables acción-ángulo se necesita para la Mecánica cuántica antigua, la ecuación de Hamilton-Jacobi y el principio de mínima acción proporcionan la transición a la Mecánica ondulatoria, mientras que los paréntesis de Poisson y las transformaciones canónicas son valiosísimas para formular la Mecánica cuántica moderna. En segundo lugar, la Mecánica clásica ofrece al estudiante una oportunidad de dominar muchas de las técnicas matemáticas necesarias para la Mecánica cuántica aun siendo todavía válidas en función de los conceptos conocidos de la Física clásica.

Desde luego, con estos objetivos en mente, el tratamiento tradicional del tema, que se fijó en gran manera hace medio siglo, ya no resulta adecuado. Este libro intenta una exposición de la Mecánica clásica que cubra los nuevos requisitos. Se ha hecho hincapié en las formulaciones que son importantes para la Física moderna y se han presentado las técnicas matemáticas usualmente asociadas a la Mecánica cuántica cuando resulten de mayor elegancia y compacidad. Por ejemplo, se ha ampliado el estudio del movimiento bajo fuerzas centrales para introducir la Cinemática de la difusión y la solución clásica de problemas de difusión. Se ha dedicado un espacio considerable a las transformaciones canónicas, a las formulaciones con paréntesis de Poisson, a la teoría de Hamilton-Jacobi y a las variables acción-ángulo. Se proporciona una introducción a la formulación de principios variacionales para sistemas continuos y campos. Como ejemplo de

la aplicación de nuevas técnicas matemáticas, se trata la rotación del cuerpo rígido desde el punto de vista de las transformaciones matriciales. El conocido teorema de Euler para la rotación de un cuerpo rígido puede entonces presentarse en función del problema de valores propios de una matriz ortogonal. A consecuencia de ello, temas tan diversos como el tensor de inercia, las transformaciones de Lorentz en el espacio de Minkowski y las frecuencias resonantes de las oscilaciones pequeñas resultan susceptibles de un tratamiento matemático unificado. Además, mediante esta técnica es posible incluir en una etapa previa los difíciles conceptos de operaciones de reflexión y cantidades pseudotensoriales, tan importantes en la Mecánica cuántica moderna. Un nuevo adelanto de los métodos matriciales es que se pueden introducir los «spinores» en relación con los parámetros de Cayley-Klein.

Se han tomado sin dudar varios puntos de partida adicionales. Demasiado frecuentemente, la Relatividad restringida no recibe ningún desarrollo relacionado con ella salvo como parte de un curso especializado que también cubre la Relatividad generalizada. No obstante, su importancia vital en Física moderna exige que se exponga al estudiante la Relatividad restringida en una etapa previa de su formación. En consecuencia, se ha dedicado al tema el Capítulo 6. Otra innovación ha sido la inclusión de las fuerzas dependientes de la velocidad. Históricamente, la Mecánica clásica se desarrolló haciendo hincapié en las fuerzas estáticas que sólo dependen de la posición, tal como las fuerzas gravitatorias. Por otra parte, en la Física moderna aparece constantemente la fuerza electromagnética que depende de la velocidad. A fin de que el estudiante pueda manejar dichas fuerzas lo más pronto posible, desde el principio se han incluido en la estructura de la Mecánica potenciales dependientes de la velocidad y se han desarrollado coherentemente a lo largo de todo el texto.

Un nuevo elemento ha sido aún el tratamiento de la Mecánica de sistemas continuos y campos del Capítulo 11 y procede algún comentario acerca de la elección de la materia. Interpretado estrictamente, el tema podría incluir toda la Elasticidad, la Hidrodinámica y la Acústica, si bien esos temas se salen del ámbito prescrito a este libro y para la mayoría de ellos se han escrito tratados adecuados. Por contra, no se dispone de ningún tratado relacionado con los fundamentos clásicos de la formulación de principios variacionales de los sistemas continuos, a pesar de su creciente importancia en la teoría de campos de partículas elementales. La teoría de campos puede llevarse dándole una gran longitud y complejidad antes de que sea necesario introducir la cuantización. Por ejemplo, es perfectamente posible estudiar el tensor esfuerzo-energía, las ecuaciones de continuidad microscópicas, las representaciones en el espacio de las cantidades de movimiento, etc., totalmente dentro del campo de la Física clásica. Sin embargo, creímos que el tratamiento adecuado de estos temas requiere una elaboración que se sale de lo que se podría esperar naturalmente del estudiante. Se decidió por tanto que, al menos en esta edición, se limitara el Capítulo 11 a una descripción elemental de la formulación de Lagrange y de Hamilton de los campos.

El curso para el que está pensado este texto tiene un prerrequisito de un curso intermedio de Mecánica. Tanto para el estudiante inadecuadamente preparado (cosa muy frecuente) como para el que ambiciosamente pretende saltarse la etapa intermedia, se ha hecho un esfuerzo para que el libro contenga todo lo necesario sin necesidad de acudir a otros. Por tanto, gran parte de los Capítulos 1 y 3 se dedica a materias que suelen tratarse en los cursos preliminares.

Con pocas excepciones, no se necesitará más base matemática que la que obtienen los alumnos en Cálculo infinitesimal y Análisis vectorial en cursos preuniversitarios. Por tanto, se da un espacio considerable para desarrollar las herramientas matemáticas más complicadas a medida que se necesiten. El conocimiento elemental de las ecuaciones de Maxwell y de sus consecuencias más sencillas es necesario para comprender los apartados referentes a las fuerzas electromagnéticas. La mayoría de estudiantes que ingresan en la Facultad han tenido al menos un curso de Física moderna y suelen haber aprovechado esta circunstancia para indicar brevemente la relación entre un desarrollo clásico y su continuación cuántica.

En las publicaciones de Mecánica se dispone de un gran lote de ejercicios, fácilmente accesibles a todo el mundo, por lo que no parecía necesario reproducir una colección numerosa de tales problemas. Por ello se han limitado los ejercicios al final de cada capítulo a aquellos que sirvan de ampliación al texto, ilustrando algún punto particular o que proporcionen teoremas variantes. Se han evitado conscientemente las piezas de museo pedantes.

La cuestión de la notación es siempre fastidiosa. Es imposible lograr un sistema de notación coherente y sin ambigüedad que no sea al mismo tiempo impracticable y engorroso. Se ha seguido el convenio acostumbrado de representar los vectores por letras negritas redondas. Además, las cantidades matriciales de cualquier rango y los tensores que no sean vectores se representan por caracteres negritos del tipo: **A**. *Al final del libro se da un índice de símbolos que consigna la apariencia inicial de cada significado de los símbolos importantes. No se incluyen los caracteres secundarios que sólo aparecen una vez.*

Al final de cada capítulo se han incluido referencias correspondientes a la elaboración de la materia tratada o al tratamiento de cuestiones que no se hayan abordado. Las evaluaciones que acompañan a dichas referencias son, desde luego, puramente personales pero se ha creído necesario proporcionar al estudiante una guía para la laberíntica bibliografía de la Mecánica. Estas referencias, junto con otras muchas, se consignan también al final del libro. La lista no pretende ser en absoluto completa, habiéndose omitido deliberadamente muchos de los libros antiguos. De todas maneras, la lista contiene las referencias de las obras que se han utilizado para escribir este libro y debe servir, por tanto, de reconocimiento por mi parte a dichas fuentes.

El presente texto ha resultado de un curso de lecciones de Mecánica clásica que di en la Universidad de Harvard y estoy muy agradecido al Profesor J. H. Van Vleck, entonces Jefe del Departamento de Física, por la ayuda personal y oficial que me prestó. Al Profesor J. Schwinger y a otros colegas les debo muchas y valiosas sugerencias. También quiero expresar mi gratitud a los estudiantes de mis cursos, cuya reacción favorable y activo interés proporcionaron el ímpetu continuado para este trabajo.

תושלב"ע

Cambridge, Mass.
Marzo 1950

HERBERT GOLDSTEIN

Índice analítico

PRÓLOGO v

CAPÍTULO 1 REPASO DE LOS PRINCIPIOS ELEMENTALES 1

1-1 Mecánica de una partícula 1
1-2 Mecánica de un sistema de partículas 6
1-3 Ligaduras 14
1-4 Principio de d'Alembert y ecuaciones de Lagrange 19
1-5 Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación 26
1-6 Aplicaciones sencillas de la formulación lagrangiana 30

CAPÍTULO 2 PRINCIPIOS VARIACIONALES Y ECUACIONES DE LAGRANGE 43

2-1 Principio de Hamilton 43
2-2 Algunas técnicas del cálculo de variaciones 45
2-3 Deducción de las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton 53
2-4 Extensión del principio de Hamilton a sistemas no holonomos 56
2-5 Ventajas de una formulación de principio variacional 63
2-6 Teoremas de conservación y propiedades de simetría 66

CAPÍTULO 3 PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS 85

3-1 Reducción al problema equivalente de un cuerpo 85
3-2 Ecuaciones del movimiento e integrales primeras 87
3-3 Problema unidimensional equivalente y clasificación de órbitas 92
3-4 Teorema del virial 101

3-5 Ecuación diferencial de la órbita y potenciales de fuerza integrables ... 105
3-6 Condiciones para órbitas cerradas (teorema Bertrand) 112
3-7 Problema de Kepler: Fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia 116
3-8 Movimiento en el tiempo en el problema de Kepler 122
3-9 Vector de Laplace-Runge-Lenz 128
3-10 Dispersión en un campo de fuerzas central 132
3-11 Transformación del problema de la dispersión a coordenadas del laboratorio 143

CAPÍTULO 4 CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO 161

4-1 Coordenadas independientes para un cuerpo rígido 161
4-2 Transformaciones ortogonales 167
4-3 Propiedades formales de la matriz de cambio 173
4-4 Ángulos de Euler 183
4-5 Parámetros Cayley-Klein y cantidades relacionadas con ellos 188
4-6 Teorema de Euler referente al movimiento del cuerpo rígido 202
4-7 Rotaciones finitas 209
4-8 Rotaciones infinitesimales 213
4-9 Velocidad de variación de un vector 222
4-10 Fuerza de Coriolis 226

CAPÍTULO 5 ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO 239

5-1 Momento cinético y energía cinética del movimiento alrededor de un punto 239
5-2 Tensores y afinores 244
5-3 Tensor de inercia y momento de inercia 248
5-4 Valores propios del tensor de inercia y transformación a los ejes principales 252
5-5 Métodos de solución de problemas de cuerpo rígidos y ecuaciones de Euler del movimiento 259
5-6 Movimiento de un cuerpo rígido exento de momentos 261
5-7 Peonza simétrica pesada con un punto fijo 270
5-8 Precesión de los equinoccios y de las órbitas de satélites 285
5-9 Precesión de sistemas de cargas en un campo magnético 293

CAPÍTULO 6 OSCILACIONES PEQUEÑAS 305

6-1 Formulación del problema 305
6-2 Ecuación de valores propios y transformación a los ejes principales ... 308
6-3 Frecuencias de vibración libre y coordenadas normales 317

6-4 Vibraciones libres de una molécula triatómica lineal 323
6-5 Vibraciones forzadas y efecto de las fuerzas disipativas 328

CAPÍTULO 7 LA TEORÍA RESTRINGIDA DE LA RELATIVIDAD EN MECÁNICA CLÁSICA 341

7-1 Programa básico de la relatividad restringida 342
7-2 Transformación de Lorentz 344
7-3 Transformaciones de Lorentz en espacios reales de cuatro dimensiones 356
7-4 Otras descripciones de la transformación de Lorentz 361
7-5 Formulaciones covariantes en cuatro dimensiones 367
7-6 Las ecuaciones de la fuerza y la energía en mecánica relativista 373
7-7 Cinemática relativista de las colisiones y de sistemas de muchas partículas 380
7-8 Formulación lagrangiana de la mecánica relativista 394
7-9 Formulaciones lagrangianas covariantes 401

CAPÍTULO 8 ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE HAMILTON 417

8-1 Transformaciones de Legendre y ecuaciones de movimiento de Hamilton 417
8-2 Coordenadas cíclicas y teoremas de conservación 427
8-3 Método de Routh y oscilaciones en torno al movimiento estacionario 431
8-4 Formulación de Hamilton de la mecánica relativista 437
8-5 Deducción de las ecuaciones de Hamilton a partir de un principio variacional 443
8-6 Principio de mínima acción 446

CAPÍTULO 9 TRANSFORMACIONES CANÓNICAS 461

9-1 Ecuaciones de la transformación canónica 461
9-2 Ejemplos de transformaciones canónicas 470
9-3 Método simpléctico para transformaciones canónicas 476
9-4 Corchetes de Poisson y otros invariantes canónicos 484
9-5 Ecuaciones de movimiento. Transformaciones canónicas infinitesimales y teoremas de conservación con la formulación de los corchetes de Poisson 494
9-6 Relaciones del corchete de Poisson momento cinético 507
9-7 Grupos de simetría de sistemas mecánicos 511
9-8 Teorema de Liouville 518

CAPÍTULO 10 TEOREMA DE HAMILTON-JACOBI 533

10-1 Ecuación de Hamilton-Jacobi para la función principal de Hamilton..... 533
10-2 El problema del oscilador armónico como ejemplo del método de Hamilton-Jacobi 538
10-3 Ecuación de Hamilton-Jacobi para la función característica de Hamilton 541
10-4 Separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi 546
10-5 Variables acción-ángulo en sistemas de un grado de libertad 556
10-6 Variables acción-ángulo para sistemas totalmente separables 562
10-7 Problema de Kepler tratado con variables acción ángulo 572
10-8 Teoría de Hamilton-Jacobi. Óptica geométrica y Mecánica ondulatoria... 588

CAPÍTULO 11 TEORÍA CANÓNICA DE LA PERTURBACIÓN 605

11-1 Introducción 605
11-2 Perturbación dependiente del tiempo (variación de constantes) 606
11-3 Ejemplos de la teoría de la perturbación dependiente del tiempo 614
11-4 Teoría de la perturbación independiente del tiempo en primer orden con un grado de libertad 624
11-5 Teoría de la perturbación independiente del tiempo para un orden superior al primero 630
11-6 Técnicas de perturbación especializadas para mecánica celeste y mecánica espacial 639
11-7 Invariantes adiabáticos 642

CAPÍTULO 12 INTRODUCCIÓN A LAS FORMULACIONES DE LAGRANGE Y HAMILTON PARA SISTEMAS CONTINUOS Y CAMPOS 659

12-1 Transición de un sistema discreto a un sistema continuo 659
12-2 Formulación de Lagrange para sistemas continuos 663
12-3 Tensor esfuerzo-energía y teoremas de conservación 671
12-4 Formulación de Hamilton, corchetes de Poisson y representación por cantidad de movimiento 679
12-5 Teoría de campos relativista 691
12-6 Ejemplos de teorías de campo relativista 696
12-7 Teorema de Noether 712

APÉNDICES **729**

A Demostración del teorema de Bertrand 729
B Los ángulos de Euler en otros convenios 735
C Propiedades de transformación de $d\Omega$ 741
D Condiciones de Staeckel para la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi 745
E Formulación lagrangiana del campo acústico en los gases 749

BIBLIOGRAFÍA **755**
ÍNDICE DE SÍMBOLOS **765**
ÍNDICE ALFABÉTICO **779**

Capítulo 1

Repaso de los principios elementales

El movimiento de cuerpos materiales constituyó el tema de algunas de las primeras investigaciones realizadas por los pioneros de la Física. A partir de sus esfuerzos ha evolucionado un vasto campo conocido por los nombres de Mecánica analítica, Dinámica o, simplemente, Mecánica. En el siglo actual se ha impuesto el término «Mecánica clásica» para distinguir esa rama de la Física de las modernas teorías físicas, especialmente de la Mecánica cuántica. También lo haremos nosotros, interpretando que el nombre incluye el tipo de Mecánica que se desprende de la teoría de la Relatividad restringida. El objeto de este libro es desarrollar la estructura de la Mecánica clásica y bosquejar alguna de sus aplicaciones de interés actual a la Física pura.

Toda presentación de la Mecánica se basa en algunos conceptos físicos fundamentales, tales como espacio, tiempo, simultaneidad, masa y fuerza. Cuando tratemos la teoría de la Relatividad restringida, examinaremos brevemente las nociones de simultaneidad y de escalas de tiempo y longitud. Sin embargo, en la mayor parte del libro, no vamos a analizar críticamente estos conceptos; en vez de ello, los supondremos términos no definidos cuyo significado es familiar al lector.

1-1 MECÁNICA DE UNA PARTÍCULA

Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición de una partícula para un origen dado y sea $\mathbf{v}$ su vector velocidad:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{1-1}$$

La *cantidad de movimiento* **p** de la partícula es, por definición, el producto de su masa por su velocidad:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{1-2}$$

A consecuencia de interacciones con campos y objetos exteriores, la partícula puede experimentar fuerzas de diversos tipos, p. ej., gravitatorias o electrodinámicas; la suma vectorial de las fuerzas que se ejercen sobre la partícula es la fuerza resultante **F**. La Mecánica de la partícula está regida por la *Segunda Ley de Newton del Movimiento,* la cual establece que exiten sistemas de referencia en los cuales el movimiento de la partícula está descrito por la ecuación diferencial

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \tag{1-3}$$

o sea

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \tag{1-4}$$

En la mayoría de los casos, la masa de la partícula es constante y la ecuación (1-3) se reduce a

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \tag{1-5}$$

donde **a** es el vector aceleración de la partícula definido por

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{1-6}$$

La ecuación del movimiento es, pues, una ecuación diferencial de segundo orden, suponiendo que **F** no dependa de derivadas de orden superior.

Todo sistema de referencia en el cual sea válida la ecuación (1-3) se denomina *sistema inercial* o *de Galileo.* Incluso en Mecánica clásica, la noción de sistema inercial es una idealización. Sin embargo, en la práctica suele ser posible establecer un sistema de coordenadas que se aproxime cuanto queramos a las propiedades deseadas. Para muchos fines, un sistema de referencia solidario a la Tierra (el «sistema del laboratorio») constituye una aproximación suficiente a un sistema inercial, mientras que para ciertos fines astronómicos puede ser necesario construir un sistema inercial por referencia a las galaxias más lejanas.

Muchas conclusiones importantes de la Mecánica se pueden expresar en forma de

teoremas de conservación que indican en qué condiciones se mantienen constantes en el tiempo diversas magnitudes mecánicas. La ecuación (1-1) nos da directamente el primero de ellos, el

Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de una partícula: Si la fuerza resultante, **F**, *es nula, será* $\dot{\mathbf{p}} = 0$ *y se conservará la cantidad de movimiento* **p**.

El momento cinético de la partícula respecto a un punto O se representa por **L** y es, por definición,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{1-7}$$

donde **r** es el vector de posición que va de O a la partícula. Observemos que el orden de los factores es importante. Definimos ahora el *momento de una fuerza* respecto *a un punto* O en la forma

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{1-8}$$

La ecuación análoga a la (1-3) para **N** se obtiene formando el producto vectorial de **r** por la ecuación (1-4):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \tag{1-9}$$

La ecuación (1-9) se puede escribir de otra forma, utilizando la identidad vectorial:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \tag{1-10}$$

en donde, evidentemente, se anula el primer término del segundo miembro. A consecuencia de esta identidad, la ecuación (1-9) toma la forma

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \tag{1-11}$$

Notemos que tanto **N** como **L** dependen del punto O respecto al cual se toman los momentos.

Al igual que sucedía con la ecuación (1-3), la ecuacción (1-11) para el momento da

también un teorema de conservación inmediato que es esta vez el

Teorema de conservación del momento cinético de una partícula: Si el momento resultante $\mathbf{N}$ *es nulo, será* $\dot{\mathbf{L}} = 0$, *y se conserva el momento cinético.*

Consideremos ahora el trabajo efectuado por la fuerza exterior $\mathbf{F}$ sobre la partícula cuando ésta va del punto 1 al punto 2. Por definición, este trabajo es

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{1-12}$$

Si la masa es constante (como supondremos de ahora en adelante, a menos que se especifique lo contrario), la integral de la ecuación (1-12) se reduce a

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}\, dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2)\, dt,$$

y por tanto

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2). \tag{1-13}$$

La magnitud escalar $mv^2/2$ es la llamada energía cinética de la partícula y se representa por T, con lo que el trabajo efectuado es igual a la variación de energía cinética:

$$W_{12} = T_2 - T_1. \tag{1-14}$$

Cuando el campo de fuerzas sea tal que el trabajo W_{12} sea el mismo para todo camino posible que una los puntos 1 y 2, diremos que la fuerza (y el sistema) es *conservativa*. Otra descripción de sistema conservativo se obtiene imaginando que se lleva la partícula del punto 1 al punto 2 por un camino posible y luego regresa al punto 1 por otro camino. La independencia de W_{12} del camino particular seguido implica que el trabajo efectuado a lo largo del circuito cerrado mencionado sea nulo, es decir:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \tag{1-15}$$

Desde un punto de vista físico, queda claro que un sistema no podrá ser conservativo

cuando existan en él rozamientos u otras fuerzas disipativas, porque el producto $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ debido al rozamiento es siempre negativo y no podrá anularse la integral.

Según un conocido teorema de Análisis vectorial,* para que W_{12} sea independiente del camino físico seguido por la partícula es condición necesaria y suficiente que $\mathbf{F}$ sea el gradiente de una cierta función escalar de la posición:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}), \tag{1-16}$$

donde V recibe el nombre de *potencial,* o *energía potencial.* La existencia de V puede inferirse intuitivamente mediante un razonamiento sencillo. Si W_{12} es independiente del camino de integración entre los extremos 1 y 2, se podría considerar que W_{12} es la variación de una magnitud que sólo depende de la posición de los puntos extremos. Esta magnitud la podemos representar por $-V$, con lo que para un elemento de camino tendremos la relación

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -dV$$

o sea

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

que es equivalente a la ecuación (1-16). Observemos que, en la ecuación 1-16, podemos sumar a V una cantidad cualquiera constante en el espacio, sin que quede afectado el resultado. Por tanto, *el nivel cero de V es arbitrario.*

En el caso de un sistema conservativo, el trabajo efectuado por las fuerzas es

$$W_{12} = V_1 - V_2. \tag{1-17}$$

Combinando la ecuación (1-17) con la (1-14) tenemos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2, \tag{1-18}$$

---

* Véase, p. ej., W. Kaplan, *Advanced Calculus,* 2.ª ed. (Reading Massachusetts: Addison-Wesley, 1973), p. 311, p. 347.

que expresa en símbolos el

Teorema de conservación de la energía de una partícula: Si las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, se conservará la energía total $T + V$ de la partícula.

La fuerza aplicada a una partícula puede venir dada, en determinadas circunstancias, por el gradiente de una función escalar que dependa explícitamente de la posición de la partícula y del tiempo. No obstante, el trabajo efectuado sobre la partícula cuando recorre una distancia ds,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial V}{\partial s} ds,$$

ya no será la variación total de $-V$ durante el corrimiento, puesto que V también varía explícitamente con el tiempo al moverse la partícula. Luego el trabajo efectuado cuando la partícula va del punto 1 al punto 2 ya no será la diferencia entre los valores de la función V en dichos puntos. Aun cuando podamos definir una energía total $T + V$, no se conserva en el curso del movimiento de la partícula.

1-2 MECÁNICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Al generalizar a sistemas de muchas partículas las ideas del apartado anterior, deberemos distinguir entre *fuerzas exteriores* que se ejercen sobre las partículas por parte de fuentes de fuera del sistema y *fuerzas interiores* sobre, p. ej., la partícula i debidas a las demás partículas del sistema. Así, la ecuación del movimiento (Segunda ley de Newton) para la partícula i-ésima se escribirá

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \tag{1-19}$$

donde $\mathbf{F}_i^{(e)}$ representa la fuerza exterior y $\mathbf{F}_{ji}$ es la fuerza interior que la partícula j-ésima ejerce sobre la partícula i-ésima (naturalmente, $\mathbf{F}_{ii}$ es nula). Supondremos que $\mathbf{F}_{ji}$ (como $\mathbf{F}_i^{(e)}$) cumplen la tercera ley de Newton del movimiento en su forma original: que las fuerzas que se ejercen entre sí dos partículas son iguales y opuestas. Esta hipótesis (que no es válida para todos los tipos de fuerzas) se denomina a veces *ley débil de acción y reacción.*

Sumando las ecuaciones (1-19) para todas las partículas, se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji}. \tag{1-20}$$

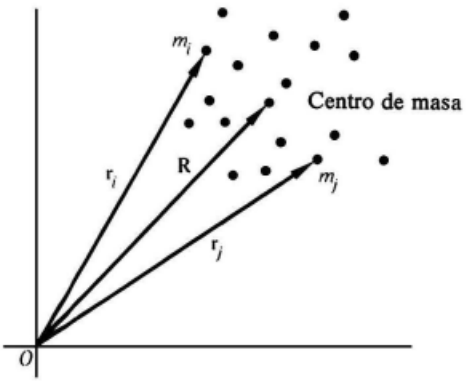


FIGURA 1-1
Centro de masa de un sistema de partículas.

El primer sumatorio del segundo miembro nos da la resultante de las fuerzas exteriores $\mathbf{F}^{(e)}$, mientras que el segundo término se anula, ya que la ley de la acción y la reacción dice que cada pareja $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}$ da cero. Para reducir el primer miembro, definamos un vector $\mathbf{R}$ que sea la media de los vectores de posición de las partículas, ponderada en proporción a sus masas:

$$\mathbf{R} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{M}. \tag{1-21}$$

El vector $\mathbf{R}$ define un punto llamado *centro de masa,* o menos precisamente centro de gravedad, del sistema (cfr. Fig. 1-1). Con esta definición, la (1-20) se reduce a

$$M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)}. \tag{1-22}$$

que nos dice que el centro de masa se mueve como si la resultante de las fuerzas exteriores estuviera aplicada a la masa total del sistema concentrada en su centro de masa. Las fuerzas puramente internas, si cumplen la tercera ley de Newton, no tendrán pues efecto alguno sobre el movimiento del centro de masa. Un ejemplo muy corriente es el de la explosión de una granada en movimiento —el centro de masa de los fragmentos se mueve como si la granada siguiera estando en una sola pieza (si se desprecia la resistencia del aire). El mismo principio interviene en la propulsión a chorro y por cohete. Para que no se vea afectado el movimiento del centro de masa, la expulsión de los gases a gran velocidad debe estar contrarrestada por el movimiento del vehículo hacia adelante.

En virtud de la ecuación (1-21), la cantidad de movimiento total del sistema,

$$\mathbf{P} = \Sigma m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M\frac{d\mathbf{R}}{dt}, \tag{1-23}$$

es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa. En consecuencia, la ecuación (1-23) del movimiento del centro de masa puede volverse a enunciar en forma del

Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas: Cuando la resultante de las fuerzas exteriores es nula, se conserva la cantidad de movimiento total.

Obtenemos el momento cinético resultante del sistema formando los productos vectoriales $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ y sumándolos para todos los valores de i. Si realizamos esta operación en la ecuación (1-19) resulta, con ayuda de la identidad (1-10),

$$\sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}. \tag{1-24}$$

El último término del segundo miembro de (1-24) puede considerarse que es una suma de pares de la forma

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}, \tag{1-25}$$

utilizando la igualdad de acción y reacción. Pero $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ coincide con el vector $\mathbf{r}_{ij}$ que va de j a i (v. Fig. 1-2), por lo que el segundo miembro de la ecuación (1-25) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji}.$$

Si las fuerzas interiores entre dos partículas, además de ser iguales y opuestas, están sobre la recta que une las partículas —condición conocida por el nombre de *ley fuerte de acción y reacción*— todos estos productos vectoriales serán nulos. Con esta hipótesis, la suma para todos los pares será nula y la ecuación (1-24) podrá escribirse en la forma

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)}. \tag{1-26}$$

La derivada temporal del momento cinético resultante es, pues, igual al momento resultante de las fuerzas exteriores respecto al punto dado. A la ecuación (1-26) corresponde el

Teorema de conservación del momento cinético resultante: **L** *será constante en el tiempo cuando el momento resultante aplicado (de las fuerzas exteriores) sea nulo.*

(Quizá valga la pena recalcar que se trata de un teorema *vectorial,* es decir, L_z se conservará si es nulo $N_x^{(e)}$, aun cuando no lo sean $N_x^{(e)}$ y $N_y^{(e)}$.)

Notemos que la conservación de la cantidad de movimiento en ausencia de fuerzas aplicadas supone que la ley débil de acción y reacción es válida para las fuerzas interiores. La conservación del momento cinético resultante del sistema en ausencia de pares aplicados exige la validez de la ley fuerte de acción y reacción —que las fuerzas interiores sean, además, *centrales*. Muchas fuerzas físicas conocidas, tales como las de la gravedad, satisfacen la ley fuerte. Pero se pueden encontrar fuerzas para las cuales acción y reacción son iguales aun cuando las fuerzas no sean centrales (v. más adelante). En un sistema en el cual haya cargas en movimiento, las fuerzas entre cargas predichas por la ley de Biot-Savart pueden vulnerar las dos formas de la ley de acción y reacción.* En tales

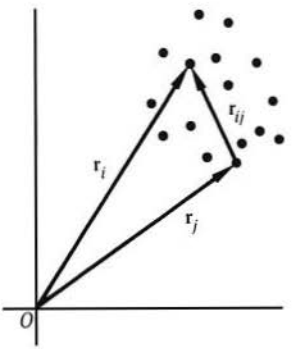


FIGURA 1-2
El vector $\mathbf{r}_{ij}$ entre las partículas i-ésima y j-ésima.

casos no son aplicables las ecuaciones (1-23) y (1-26) y sus correspondientes teoremas de conservación, al menos en la forma que los hemos dado. Usualmente será posible hallar

* Si dos cargas se mueven uniformemente con vectores velocidad paralelos que no sean perpendiculares a la recta que une las cargas, las fuerzas mutuas serán iguales y opuestas pero no estarán soportadas por el vector entre las cargas. Consideremos, además, dos cargas que se muevan (instantáneamente) de manera que una se dirija hacia la otra la cual, a su vez, se mueve perpendicularmente a la primera. Entonces, la segunda ejerce sobre la primera una fuerza no nula, sin experimentar fuerza de reacción alguna.

alguna generalización de **P** o **L** que se conserve. Así, en un sistema aislado de cargas en movimiento, lo que se conserva es la suma del momento cinético mecánico y el «momento cinético» electromagnético del campo.

La ecuación (1-23) dice que la cantidad de movimiento resultante del sistema es la misma que se tendría si se concentrara toda la masa del sistema en el centro de masa y se moviera con éste. El teorema análogo para el momento cinético es más complicado. Con el origen O como punto de referencia, el momento cinético resultante del sistema es

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

Sea **R** el vector de posición del centro de masa respecto a O y sea $\mathbf{r}'_i$ el vector de posición de la partícula i-ésima respecto al centro de masa. Tendremos entonces (v. fig. 1-3)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \tag{1-27}$$

y

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v},$$

donde

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

es la velocidad del centro de masa relativa a O y

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

es la velocidad de la partícula i-ésima relativa al centro de masa del sistema. Utilizando la ecuación (1-27), el momento cinético resultante toma la forma

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{R} \times m_i\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i + \left(\sum_i m_i\mathbf{r}'_i\right) \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt}\sum_i m_i\mathbf{r}'_i.$$

Los dos últimos términos de esta expresión son nulos, ya que ambos contienen el factor $\Sigma\, m_i\mathbf{r}'_i$, el cual define el vector de posición del centro de masa, precisamente en el sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de masa, por lo que será un vector nulo.

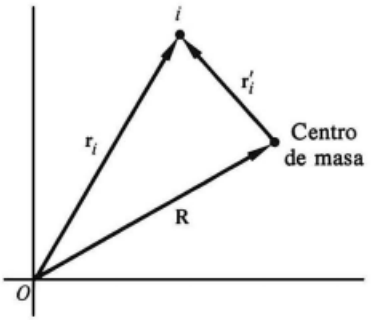


FIGURA 1-3
Vectores que intervienen en el cambio de punto de referencia para el momento cinético.

Escribiendo los demás términos en forma adecuada, el momento cinético resultante respecto a O resulta ser

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'. \tag{1-28}$$

La ecuación (1-28) nos dice que el momento cinético resultante respecto a un punto O es igual al momento cinético del sistema concentrado en su centro de masa, más el momento cinético del movimiento alrededor del centro de masa. La forma de la ecuación (1-28) hace resaltar que, en general, **L** depende del origen O a través del vector **R**. Solamente si el centro de masa está en reposo respecto a O será el momento cinético independiente del punto de referencia. En este caso es nulo el primer término de (1-28) y **L** se reduce siempre al momento cinético tomado respecto al centro de masa.

Por último, consideremos la ecuación de la energía. Al igual que en el caso de la partícula, calculamos el trabajo efectuado por todas las fuerzas al mover el sistema de una configuración inicial 1 a una configuración final 2:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i. \tag{1-29}$$

De nuevo podemos utilizar las ecuaciones del movimiento para reducir las integrales a

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i \, dt = \sum_i \int_1^2 d(\tfrac{1}{2} m_i v_i^2).$$

Luego, el trabajo efectuado sigue pudiéndose escribir en forma de diferencia entre las energías cinéticas final e inicial:

$$W_{12} = T_2 - T_1,$$

donde T, energía cinética total del sistema, es

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2. \tag{1-30}$$

Utilizando las transformaciones a las coordenadas del centro de masa, dadas en la ecuación (1-27), también podremos escribir T en la forma

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i')\cdot(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i'\right), \end{aligned}$$

y por la misma razón empleada al calcular el momento cinético, el último término es nulo y queda

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2. \tag{1-31}$$

La energía cinética, al igual que el momento cinético, consta de dos partes: la energía cinética que se obtiene considerando toda la masa concentrada en el centro de masa, más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masa.

Consideremos ahora el segundo miembro de la ecuación (1-29). En el caso particular de que las fuerzas exteriores deriven de un potencial, el primer término lo podremos escribir en la forma

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)}\cdot d\mathbf{s}_i = -\sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = -\sum_i V_i\Big|_1^2,$$

donde el subíndice i del operador indica que las derivadas se calculan respecto a las componentes de $\mathbf{r}_i$. Si las fuerzas interiores son tmbién conservativas, las fuerzas mutuas entre las partículas i-ésima y j-ésima, $\mathbf{F}_{ij}$ y $\mathbf{F}_{ji}$, podrán obtenerse a partir de una función

potencial V_{ij}. Para que se cumpla la ley fuerte de acción y reacción, V_{ij} sólo podrá ser función de la distancia entre las partículas:

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \tag{1-32}$$

Entonces, las dos fuerzas serán automáticamente iguales y opuestas,

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ij}, \tag{1-33}$$

y están soportadas por la recta que une las dos partículas,

$$\nabla V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)f, \tag{1-34}$$

donde f es una cierta función escalar. Si V_{ij} fuese también función de la diferencia de otros dos vectores asociados a las partículas, tales como sus velocidades o (entrando en el dominio de la Física moderna) sus momentos cinéticos de «spin» intrínsecos, las fuerzas seguirían siendo iguales y opuestas, pero no estarían soportadas necesariamente por la recta que une las partículas.

Cuando las fuerzas sean todas conservativas, podremos escribir el último término de la ecuación (1-29) en forma de suma de *pares* de partículas, en donde los términos para cada par son de la forma

$$-\int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j).$$

Si representamos por $\mathbf{r}_{ij}$ la diferencia de vector $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ y si ∇_{ij} representa el gradiente respecto a $\mathbf{r}_{ij}$, será

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij},$$

y

$$d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j = d\mathbf{r}_{ij},$$

con lo que el término correspondiente al par ij tendrá la forma

$$-\int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}.$$

El trabajo total debido a las fuerzas interiores se reduce entonces a

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\int_1^2 \nabla_{ij}V_{ij}\cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} V_{ij}\Big|_1^2. \tag{1-35}$$

El factor $^1/_2$ aparece en la ecuación (1-35) porque al sumar para *ambos* índices i y j, cada miembro de un par dado se incluye dos veces, primero en la suma para i y luego en la suma para j.

De estas consideraciones, queda claro que si las fuerzas exteriores e interiores derivan ambas de potenciales, se puede definir una *energía potencial total,* V del sistema,

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} V_{ij}, \tag{1-36}$$

tal que se conserva la energía total $T + V$. Este teorema es el análogo del de conservación (1-17) para una sola partícula.

Al segundo término del segundo miembro de la ecuación (1-36) se le llama energía potencial interna del sistema. En general, no tiene por qué ser nulo y, lo que es más importante, puede variar cuando el sistema varía con el tiempo. Solamente en la clase particular de sistemas llamada *cuerpos rígidos* será siempre constante el potencial interno. Formalmente, podemos definir el cuerpo rígido diciendo que es un sistema de partículas en el cual las distancias $\mathbf{r}_{ij}$ son fijas y no pueden variar con el tiempo. En tal caso, los vectores $d\mathbf{r}_{ij}$ sólo podrán ser perpendiculares a las $\mathbf{r}_{ij}$ correspondientes y por tanto, a las $\mathbf{F}_{ij}$. Así pues, en un cuerpo rígido las *fuerzas interiores no trabajan* y el potencial interno debe mantenerse constante. Como, en todo caso, el potencial total está definido salvo una constante aditiva, al estudiar el movimiento del sistema podremos prescindir por completo del potencial interno si es invariable.

1-3 LIGADURAS

En los apartados anteriores podríamos haber sacado la impresión de que todos los problemas de la Mecánica se reducen a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (1-19):

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}.$$

Simplemente, se sustituyen las distintas fuerzas que se ejercen sobre las partículas del sistema, se da vueltas a la manivela matemática y salen las respuestas como si fuera café

molido. Sin embargo, incluso desde un punto de vista puramente físico, esto es una simplificación excesiva. Por ejemplo, puede ser necesario tener en cuenta las *ligaduras* que limitan el movimiento del sistema. Ya hemos encontrado un tipo de sistema que contiene ligaduras, cual es el cuerpo rígido, en el cual las ligaduras de los movimientos de las partículas mantienen invariables sus distancias mutuas r_{ij}. Es fácil encontrar otros ejemplos de sistemas ligados. Las cuentas de un ábaco están constreñidas a un movimiento unidireccional por las varillas que las atraviesan. Las moléculas de un gas en un recipiente están limitadas por las paredes del recipiente a moverse solamente por el *interior* de éste. Una partícula situada sobre la superficie de una esfera sólida está sometida a la ligadura de que sólo puede moverse sobre la superficie esférica o por el exterior de ella.

Las ligaduras pueden clasificarse de diversas maneras y nosotros utilizaremos el sistema siguiente. Si las condiciones de ligadura se pueden expresar en forma de ecuaciones que relacionen las coordenadas de las partículas (y posiblemente el tiempo) cuya forma sea

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots, t) = 0, \tag{1-37}$$

diremos que las ligaduras son *holonomas*. Tal vez el ejemplo más simple de ligaduras holonomas lo encontramos en el cuerpo rígido, en el cual las ligaduras se expresan por medio de ecuaciones de la forma

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

Otro ejemplo fácil de ligaduras holonomas es el de una partícula obligada a moverse a lo largo de una curva o sobre una superficie dada, en donde las ecuaciones que definan la curva o la superficie serían las ecuaciones de ligadura.

Las ligaduras que no puedan expresarse de esta manera se denominan no holonomas. Las paredes del recipiente que contiene un gas constituyen una ligadura no holonoma. La ligadura citada en el ejemplo de la partícula situada sobre la superficie de una esfera es también no holonoma, ya que puede expresarse en forma de inecuación

$$r^2 - a^2 \geqq 0$$

(donde a es el radio de la esfera), la cual no es de la forma de (1-37). Así, en un campo gravitatorio, una partícula situada en la cumbre de la esfera deslizará hacia abajo sobre la superficie, pero acabará por caer.

Las ligaduras se clasifican además según que las ecuaciones de ligadura contengan el tiempo como variable explícita (reónomas) o no dependan explícitamente del tiempo (esclerónomas). Una cuenta que deslice por un alambre curvo, rígido y fijo en el espacio, está sometida a una ligadura esclerónoma; si el alambre se está moviendo de manera prescrita, la ligadura es reónoma. Notemos que si el alambre se mueve, p. ej., en reacción

al movimiento de la cuenta, la dependencia temporal de la ligadura entra en la ecuación de la ligadura solamente a través de las coordenadas del alambre curvo (que ahora son parte del sistema de coordenadas). La ligadura global será, entonces, esclerónoma.*

Las ligaduras introducen dos tipos de dificultades en la solución de los problemas mecánicos. Primero, las coordenadas r_i ya no son todas independientes puesto que están relacionadas por las ecuaciones de ligadura; luego las ecuaciones del movimiento (1-19) no serán todas independientes. Segundo, las fuerzas de ligadura, p. ej., la fuerza que el alambre ejerce sobre la cuenta (o la pared sobre la partícula gaseosa) no se da a priori. Se cuenta entre las incógnitas del problema y debe obtenerse de la solución que buscamos. En verdad, imponer ligaduras al sistema no es más que otro método de establecer que hay fuerzas presentes en el problema las cuales no se pueden especificar directamente sino que se conocen en función de su efecto sobre el movimiento del sistema.

En el caso de ligaduras holonomas, la primera dificultad se resuelve introduciendo *coordenadas generalizadas.* Hasta ahora hemos estado pensando implícitamente en coordenadas cartesianas. Un sistema de N partículas, exento de ligaduras, tiene $3N$ coordenadas independientes o *grados de libertad.* Si existen ligaduras holonomas, expresadas por k ecuaciones de la forma (1-37), podremos utilizar éstas para eliminar k de las $3N$ coordenadas y nos quedarán $3N - k$ coordenadas independientes y diremos que el sistema posee $3N - k$ grados de libertad. Esta eliminación de las coordenadas dependientes se puede expresar de otra manera, introduciendo $3N - k$ variables independientes nuevas $q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}$ en función de las cuales, las antiguas coordenadas $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ se expresarán mediante ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t) \\ &\cdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t) \end{aligned} \tag{1-38}$$

que contienen implícitamente las ligaduras. Estas son ecuaciones de *transformación* del sistema de variables $(\mathbf{r}_1)$ al sistema de las (q_1), o bien podemos considerar que las ecuaciones (1-38) son representaciones paramétricas de las variables $(\mathbf{r}_1)$. Se supone siempre que también podemos pasar del sistema (q_1) al sistema $(\mathbf{r}_1)$, es decir, que las ecuaciones (1-38) combinadas con las k ecuaciones de ligadura se pueden invertir para obtener cualquier q_i en función de la variable $(\mathbf{r}_1)$ y el tiempo.

Las coordenadas generalizadas, q_1, a diferencia de las cartesianas, no suelen dividirse

---

* La terminología de las ligaduras puede ser muy elaborada (cfr. Kilmister y Reeve, *Rational Mechanics,* New York, American Elsevier, 1966), De cierta utilidad es la distinción entre ligaduras *bilaterales*, en las que las ecuaciones de ligadura son igualdades, y *unilaterales*, que contienen desigualdades. Esta nomenclatura deriva del ejemplo de movimiento ligado relativo a una superficie. En la ligadura bilateral del movimiento sobre una superficie, la fuerza de ligadura puede tener uno y otro sentido según la normal a la superficie. Una partícula que se mueva sobre la superficie de la esfera o por su exterior, está sometida a una ligadura unilateral en la cual toda fuerza de ligadura actúa solamente en el sentido de la normal hacia el exterior.

en grupos convenientes de tres que puedan agruparse para formar vectores. Así, en el caso de una partícula obligada a moverse *sobre* la superficie de una esfera, los dos ángulos que expresan la posición sobre la esfera, p. ej., longitud y latitud, serán coordenadas generalizadas posibles. O bien, en el ejemplo del péndulo doble que se mueven en un punto (dos partículas unidas por una varilla rígida inextensible y suspendidas por otra varilla análoga sujeta a una de las partículas), los dos ángulos θ_1 y θ_2 (cfr. fig. 1-4) constituyen coordenadas generalizadas satisfactorias. Las coordenadas generalizadas, en el sentido de coordenadas distintas de las cartesianas, suelen ser útiles en sistemas sin ligaduras. Así, en el problema de la partícula que se mueve en un campo de fuerzas centrales exterior ($V = V(r)$) no hay ligadura pero es evidentemente más conveniente utilizar coordenadas polares esféricas que coordenadas cartesianas. Sin embargo, no debemos pensar en las coordenadas generalizadas en función de coordenadas de posición ortogonales. Se puede fijar cualquier tipo de magnitudes para servir de coordenadas generalizadas. Así, las amplitudes de un desarrollo en serie de Fourier de $\mathbf{r}_j$ pueden utilizarse como coordenadas generalizadas, o podemos encontrar conveniente emplear cantidades con las dimensiones de una energía o de un momento cinético.

Si la ligadura es no holonoma, no se podrán utilizar las ecuaciones que expresan la ligadura para eliminar las coordenadas dependientes. Un ejemplo corriente de ligadura no holonoma es el de un cuerpo que rueda sin deslizar sobre una superficie rugosa. Las coordenadas que se utilizan para describir el sistema incluirán, por lo general, coordenadas angulares que especifiquen la orientación del cuerpo, más un conjunto de coordenadas que describan la posición del punto de contacto sobre la superficie. La ligadura de «rodadura» relaciona estos dos sistemas de coordenadas; no son independientes. Un cambio de posición del punto de contacto significa inevitablemente un cambio de su orientación. Aún así, no podemos reducir el número de coordenadas, ya que la condición «rodadura» no puede expresarse en forma de ecuación entre las coordenadas, en la forma (1-37). Es más bien una condición sobre las *velocidades* (es decir, el punto de contacto está quieto), condición diferencial que puede darse en forma integral sólo *después* de haber resuelto el problema.

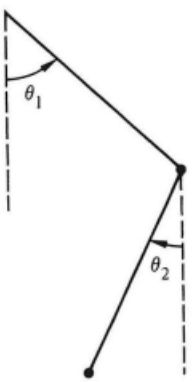


FIGURA 1-4
Péndulo doble.

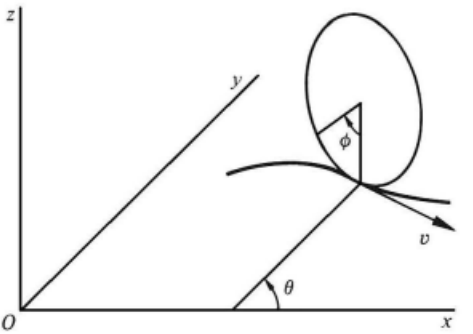


FIGURA 1-5
Disco vertical que rueda sobre un plano horizontal.

Vamos a ilustrar este caso de manera sencilla. Consideremos un disco que ruede sobre el plano horizontal xy obligado a moverse de manera que el plano del disco sea siempre vertical. Las coordenadas utilizadas para describir el movimiento podrían ser las coordenadas x,y del centro del disco, un ángulo de rotación ϕ en torno al eje del disco y el ángulo θ que forma el eje del disco con, p. ej., el eje x (cfr. fig. 1-5). A consecuencia de la ligadura, la velocidad del centro del disco, **v**, tendrá una magnitud **proporcional a** ϕ,

$$v = a\dot{\phi},$$

donde a es el radio del disco y su dirección es perpendicular al eje del mismo:

$$\dot{x} = v \operatorname{sen}\theta,$$
$$\dot{y} = -v\cos\theta.$$

Combinando estas condiciones, tenemos dos ecuaciones *diferenciales* de ligadura:

$$\begin{aligned} dx - a\operatorname{sen}\theta\, d\phi &= 0, \\ dy + a\cos\theta\, d\phi &= 0. \end{aligned} \tag{1-39}$$

Ninguna de las ecuaciones (1-39) puede integrarse sin haber resuelto, de hecho, el problema; es decir, no se puede hallar un factor integrante $f(x,y,\theta,\phi)$ que convierta una u otra de las ecuaciones en diferenciales exactas (cfr. Ejercicio 7).* Luego las ligaduras no

* En principio, siempre se puede encontrar un factor integrante para una ecuación diferencial de primer orden de ligadura en sistemas que sólo contengan dos coordenadas (cfr. Kaplan, *Advanced Calculus,* 2.ª ed., p. 531) y dichas ligaduras serán, por tanto, holonomas. Ejemplo conocido lo constituye el movimiento bidimensional de un círculo que rueda por un plano inclinado.

pueden reducirse a la forma de la ecuación (1-37) y por tanto son no holonomas. Podemos ver, fisicamente, que no puede haber relación funcional directa entre ϕ y las demás coordenadas x, y y θ observando que en todo punto de su camino se puede hacer rodar el disco alrededor de un círculo tangente al camino y de radio arbitrario. Al final del proceso, x, y y θ habrán vuelto a sus valores iniciales, pero ϕ habrá variado en una cantidad que depende del radio del círculo.

Desde luego, las ligaduras *diferenciales* no integrables de la forma de las ecuaciones (1-39) no constituyen el único punto de ligaduras no holonomas. Las condiciones de ligaduras pueden llevar consigo derivadas de orden superior, o pueden aparecer en forma de inecuaciones, según hemos visto.

En parte porque se pueden eliminar las coordenadas dependientes, los problemas que entrañan ligaduras holonomas se pueden llevar siempre a una solución formal. En cambio, no existe una manera general de abordar los problemas no holonomos. En verdad, si la ligadura no es integrable, las ecuaciones diferenciales de ligadura se pueden introducir en el problema junto con las ecuaciones diferenciales del movimiento y eliminar las ecuaciones dependientes por el método de los multiplicadores de Lagrange. Más adelante volveremos a esto. No obstante, los casos más imperfectos de ligaduras no holonomas se deben abordar individualmente y por ello, en el desarrollo de los aspectos más formales de la Mecánica clásica se supone casi invariablemente que toda ligadura, si existe, es holonoma. esta restricción no limita mucho la aplicabilidad de la teoría, a pesar de que muchas de las ligaduras que se encuentran en la vida cotidiana son no holonomas. La razón estriba en que todo el concepto de ligaduras impuestas al sistema a través del medio de hilos o superficies o paredes sólo resulta particularmente apropiado en problemas macroscópicos o a gran escala. Pero el fisico se interesa hoy en día, principalmente en problemas atómicos. A esta escala, todos los cuerpos, tanto dentro como fuera del sistema, consisten en moléculas, átomos o partículas menores que ejercen fuerzas definidas y la noción de ligadura resulta artificiosa y aparece rara vez. Las ligaduras se utilizan entonces tan sólo como idealizaciones matemáticas para el caso fisico real o como aproximaciones clásicas a una propiedad mecanocuántica, p. ej., las rotaciones de un cuerpo rígido para el «spin». Dichas ligaduras son siempre holonomas y encajan bien en el marco de la teoría.

Para obviar la segunda dificultad, cual es que no se conocen a priori las fuerzas de ligadura, nos gustaría formular la Mecánica de manera que desaparezcan las fuerzas de ligadura. Entonces sólo tendremos que tratar con fuerzas aplicadas conocidas. Una sugerencia acerca del método a seguir la da el hecho de que en un sistema particular con ligaduras, p. ej., un cuerpo rígido, el trabajo efectuado por las fuerzas interiores (que son aquí las fuerzas de ligadura) es nulo. En los apartados posteriores seguiremos esta idea y generalizaremos las que están contenidas en ella.

1-4 PRINCIPIO DE D'ALEMBERT Y ECUACIONES DE LAGRANGE

Desplazamiento virtual (infinitesimal) de un sistema es el cambio de configuración de éste a consecuencia de una variación infinitesimal arbitraria de las coordenadas $\delta\mathbf{r}_i$, *compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas al sistema en el instante dado t*. Se llama virtual al desplazamiento para distinguirlo del desplazamiento real del sistema que

tiene lugar en un intervalo de tiempo dt, durante el cual pueden variar las fuerzas y ligaduras. Supongamos que el sistema está en equilibrio, es decir, que es nula la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre cada partícula, $\mathbf{F}_i = 0$. Está claro, entonces, que el producto escalar $\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i$ que es el trabajo virtual de la fuerza $\mathbf{F}_i$ en el desplazamiento $\delta\mathbf{r}_i$, también será nulo. La suma de estos productos nulos extendida a todas las partículas será igualmente nula:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \tag{1-40}$$

Hasta ahora no hemos dicho nada que tenga un contenido físico nuevo. Descompongamos $\mathbf{F}_i$ en la fuerza aplicada $\mathbf{F}_i^{(a)}$ y la fuerza de ligadura $\mathbf{f}_i$.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i, \tag{1-41}$$

con lo cual la ecuación (1-40) queda en la forma

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \tag{1-42}$$

Limitémonos ahora a sistemas para los cuales *el trabajo virtual total de las fuerzas de ligadura sea nulo.* Hemos visto que esta condición se cumple en el caso de cuerpos rígidos y es válida para otras muchas ligaduras. Así, si se obliga a una partícula a moverse sobre una superficie, la fuerza de ligadura es perpendicular a dicha superficie, mientras que el desplazamiento virtual debe ser tangente a ella y por tanto, el trabajo virtual es nulo. Esto deja de ser cierto cuando haya fuerzas de rozamiento, por lo que deberemos excluir de nuestra formulación tales sistemas. La restricción no es demasiado enredada, ya que el rozamiento es en esencia un fenómeno macroscópico. Por otra parte, las fuerzas del rozamiento por rodadura no vulneran esta condición, ya que dichas fuerzas están aplicadas a un punto que está en reposo instantáneo y no podrán trabajar en un desplazamiento infinitesimal compatible con la ligadura de rozamiento. Notemos que cuando una partícula esté ligada a una superficie que se mueva con el tiempo, la fuerza de ligadura es perpendicular instantáneamente a la superficie y el trabajo durante un desplazamiento virtual seguirá siendo nulo aun cuando el trabajo durante un desplazamiento real en el tiempo dt no sea necesariamente nulo.

Tenemos, pues, como condición de equilibrio de un sistema que el trabajo virtual de las *fuerzas aplicadas* sea nulo:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \tag{1-43}$$

A la ecuación (1-43) se la conoce por el nombre de *principio de los trabajos virtuales.* Notemos que los coeficientes de $\delta\mathbf{r}_i$ ya no se pueden hacer iguales a cero, es decir, en general $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$, ya que los $\delta\mathbf{r}_i$ no son totalmente independientes sino que están relacionados por las ligaduras. Para igualar a cero los coeficientes, debemos transformar el principio dándole una forma que comporte los desplazamientos virtuales de las q_i, que son independientes. La ecuación (1-43) satisface nuestras necesidades en cuanto no contiene las $\mathbf{f}_i$, pero sólo es válida para la Estática: necesitamos una condición que entrañe el movimiento general del sistema.

Para obtener un tal principio utilizaremos un recurso que pensó Jacques Bernoulli y desarrolló D'Alembert. La ecuación del movimiento,

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i,$$

puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0,$$

que dice que las partículas del sistema estarán en equilibrio bajo una fuerza igual a la real más una «fuerza efectiva invertida» $-\dot{\mathbf{p}}_i$. En vez de (1-40) podemos escribir inmediatamente

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \tag{1-44}$$

y haciendo la misma descomposición en fuerzas aplicadas y fuerzas de ligadura, resulta

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Limitémonos de nuevo a sistemas para los cuales el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura sea nulo y obtendremos

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \tag{1-45}$$

que constituye el *principio de D'Alembert.* Hemos logrado nuestro propósito de que no figuren las fuerzas de ligadura y podremos suprimir el supraíndice $^{(a)}$ sin ambigüedad. Aún no tiene forma útil para proporcionar las ecuaciones del movimiento del sistema. Debemos ahora transformar el principio en una expresión que contenga desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas, las cuales son entonces independientes entre

si (para ligaduras holonomas), con lo cual se podrán hacer separadamente iguales a cero los coeficientes de las δq_i.

La traducción del lenguaje de las $\mathbf{r}_i$ al de las q_j parte de las ecuaciones de transformación (1-38),

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

(suponiendo n coordenadas independientes) y se efectúa mediante las «reglas de cadena» del cálculo de derivadas parciales.* Así, $\mathbf{v}_i$ se expresa en función de las $\dot{q}_k$ mediante la fórmula

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \tag{1-46}$$

Análogamente, el desplazamiento virtual arbitrario $\delta\mathbf{r}_i$ se puede relacionar con los desplazamientos virtuales δq_j mediante

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{1-47}$$

Notemos que aquí no interviene ninguna variación del tiempo δt, ya que un desplazamiento virtual sólo considera, por definición, desplazamientos de las coordenadas. (Sólo entonces es perpendicular el desplazamiento virtual a la fuerza de ligadura si ésta varía con el tiempo).

En función de las coordenadas generalizadas, el trabajo virtual de las $\mathbf{F}_i$ será

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$= \sum_j Q_j \delta q_j, \tag{1-48}$$

donde las Q_j son las llamadas componentes de la *fuerza generalizada,* las cuales se definen en la forma

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \tag{1-49}$$

---

* Véase, p. ej., Kaplan, *Advanced Calculus,* 2.ª ed., p. 135.

Nótese que al igual que las q no tiene por qué tener las dimensiones de una longitud, las Q no tienen necesariamente las dimensiones de una fuerza, si bien $Q_j \delta q_j$ deben siempre tener las dimensiones de un trabajo.

Pasemos ahora al otro término de la ecuación (1-45), que puede escribirse en la forma

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i.$$

que expresando $\delta \mathbf{r}_i$ mediante (1-47) queda

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Consideremos ahora la relación

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\}. \tag{1-50}$$

En el último término de la ecuación (1-50) podemos permutar las derivaciones respecto a t y q_j, ya que, en analogía con (1-46)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j},$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j},$$

en virtud de la ecuación (1-46). Además, en la ecuación (1-46) vemos que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \tag{1-51}$$

La sustitución de estos cambios en (1-50) conduce al resultado de que

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\},$$

y el segundo término del primer miembro de la ecuación (1-45) puede desarrollarse dando

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j .$$

Identificando $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ con la energía cinética T del sistema, el principio D'Alembert

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \tag{1-52}$$

Notemos que en un sistema de coordenadas cartesianas la derivada parcial de T respecto a q_j es nula. Así pues, hablando el lenguaje de la Geometría diferencial, este término se debe a la curvatura de las coordenadas q_j. Por ejemplo, en coordenadas polares es en la derivada parcial de T respecto a una coordenada angular donde aparece el término de la aceleración centrípeta.

Hasta el momento no hemos impuesto otra restricción a la naturaleza de las ligaduras que la de efectuar un trabajo nulo en todo desplazamiento virtual. Las variables q_j pueden ser un sistema cualquiera de coordenadas para describir el movimiento del sistema. Sin embargo, si las ligaduras son holonomas, será posible encontrar sistemas de coordenadas q_j independientes que contengan implícitamente las condiciones de ligadura en las ecuaciones de transformación (1-38). Todo desplazamiento virtual δq_j será entonces independiente de δq_k y por tanto, la única manera de que se cumpla (1-52) es que se anulen por separado los coeficientes:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \tag{1-53}$$

En total hay n ecuaciones.

Las ecuaciones (1-53) suele llamárseles ecuaciones de Lagrange, si bien esta designación se reserva frecuentemente para la forma que toman las ecuaciones (1-53) cuando las fuerzas derivan de un potencial escalar V:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V.$$

En este caso, las fuerzas generalizadas pueden escribirse en la forma

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

que tiene exactamente la misma expresión de la derivada parcial de una función $-V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t)$ respecto a q_j:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \tag{1-54}$$

Las ecuaciones (1-53) se pueden escribir también en la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0. \tag{1-55}$$

Las ecuaciones del movimiento de la forma (1-55) no están limitadas necesariamente a sistemas conservativos; solamente si V no es función explícita del tiempo, es conservativo el sistema (cfr. p. 6). Sin embargo, tal como definimos aquí V no depende de las velocidades generalizadas. Luego podemos incluir un término en V en la derivada parcial respecto a $\dot{q}_j$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

O sea, definiendo una nueva función, la *lagrangiana L*, en la forma

$$L = T - V, \tag{1-56}$$

las ecuaciones (1-53) quedan en la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{1-57}$$

A menos que especifiquemos otra cosa, cuando hablemos de «ecuaciones de Lagrange» querremos significar las ecuaciones (1-57).

Debe hacerse notar que para un sistema de ecuaciones de movimiento particular no hay una elección única de lagrangiana tal que las ecuaciones (1-53) lleven a las ecuaciones de movimiento en las coordenadas generalizadas dadas. Así, en el Ejercicio 14 se demuestra que si $L(q, \dot{q}, t)$ es una lagrangiana adecuada y $F(q, t)$ es una función derivable *cualquiera* de las coordenadas generalizadas y el tiempo,

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}$$

será también una lagrangiana que dará las mismas ecuaciones del movimiento. También es posible a menudo encontrar otras Lagrangianas además de las construidas por esta prescripción (v. Ejercicio 18). Aun cuando la ecuación (1-56) constituye siempre un camino adecuado para construir una lagrangiana para un sistema conservativo, no proporciona la *única* lagrangiana adecuada para el sistema dado.

1-5 POTENCIALES DEPENDIENTES DE LA VELOCIDAD Y FUNCIÓN DE DISIPACIÓN

Las ecuaciones de Lagrange se pueden poner en la forma (1-57) aun cuando no exista función potencial, V, en el sentido usual, con tal que las fuerzas generalizadas se obtengan de una función $U(q_j, \dot{q}_j)$ mediante la prescripción

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right). \tag{1-58}$$

En tal caso, las ecuaciones (1-57) siguen deduciéndose de las (1-53) estando dada la lagrangiana por

$$L = T - U. \tag{1-59}$$

U puede llamarse «potencial generalizado» o «potencial dependiente de la velocidad».* La posibilidad de utilizar dicho «potencial» no es académica; se aplica a un tipo de campos de fuerzas muy importante, cual es, las fuerzas electromagnéticas que se ejercen sobre cargas móviles. Considerando su importancia, vale la pena que nos entretengamos en este tema.

En el sistema de unidades de Gauss, las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1-60}$$

---

* La historia de la designación dada a este potencial es curiosa. Aparentemente espoleado por la primitiva (y errónea) Electrodinámica clásica de Weber, la cual postulaba fuerzas dependientes de la velocidad, el matemático alemán E. Schering parece haber sido el primero en intentar seriamente incluir dichas fuerzas en el marco de la Mecánica, cfr. Gött, Abh. **18**, 3 (1873). La primera edición de *Analytical Dynamics* (1904) de Whittaker le llama «función potencial de Schering», pero el nombre no perduró y se suprimió en ediciones posteriores. Más recientemente, Morgenstern y Szabó (*Vorlesungen über Theoretische Mechanik,* 1961) han utilizado el nombre de «potencial de Schering» para el potencial dependiente de la velocidad concreto que da la fuerza de Coriolis en un sistema de coordenadas giratorio. Nosotros preferimos el nombre «potencial generalizado», incluyendo en esta designación también la energía potencial ordinaria, función solamente de la posición.

La fuerza que se ejerce sobre una carga q no viene dada enteramente por la fuerza eléctrica

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\phi,$$

por lo que el sistema no es conservativo en este sentido. En vez de ello, la fuerza completa es

$$\mathbf{F} = q\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right\}. \tag{1-61}$$

$\mathbf{E}$ no es el gradiente de una función escalar, ya que $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$, pero de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ se deduce que $\mathbf{B}$ puede representarse por el rotacional de un vector,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{1 62}$$

donde $\mathbf{A}$ es el llamado potencial vector magnético. Entonces, la ecuación del rotacional de $\mathbf{E}$ queda en la forma

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Luego, podemos escribir

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

o sea

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{1-63}$$

En función de los potenciales ϕ y $\mathbf{A}$, la llamada fuerza de Lorentz (1-61) se convierte en

$$\mathbf{F} = q\left\{-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))\right\}. \tag{1-64}$$

Los términos de la ecuación (1-64) se pueden poner en una forma más conveniente. Por ejemplo, consideremos la componente x

$$(\nabla\phi)_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

y

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}))_x &= v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\\ &= v_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}+v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}-v_y\frac{\partial A_x}{\partial y}-v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}-v_x\frac{\partial A_x}{\partial x},\end{aligned}$$

donde hemos sumado y restado el término

$$v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}.$$

Ahora bien, la derivada total de A_x es

$$\frac{dA_x}{dt}=\frac{\partial A_x}{\partial t}+\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right),$$

donde el primer término corresponde a la variación explícita de A_x con el tiempo y el segundo término se debe al movimiento de la partícula con el tiempo, que hace cambiar el punto del espacio en donde se evalúa A_x. La componente x *de* $\mathbf{v}\times\nabla\times\mathbf{A}$ podrá, pues, escribirse

$$(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}))_x=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})-\frac{dA_x}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

Efectuando estas sustituciones, la (1-64) queda en la forma

$$F_x = q\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi-\frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})\right)\right\}. \qquad (1\text{-}64')$$

Como el potencial escalar es independiente de la velocidad, esta expresión equivale a

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_x},$$

donde

$$U = q\phi - \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}. \tag{1-65}$$

U es un potencial generalizado en el sentido de la ecuación (1-58) y la lagrangiana para una partícula cargada en un campo electromagnético puede escribirse

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}. \tag{1-66}$$

Debe notarse que si no derivan de un potencial todas las fuerzas actúan sobre el sistema, la ecuaciones de Lagrange podrán siempre escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j,$$

donde L contiene el potencial de las fuerzas conservativas como antes y Q_j representa las fuerzas que *no* derivan de un potencial. Esta situación se presenta a menudo, cuando haya fuerzas de rozamiento. Sucede frecuentemente que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad de la partícula, con lo que su componente x tendrá la forma

$$F_{fx} = -k_x v_x.$$

Las fuerzas de rozamiento de este tipo se pueden deducir a partir de una función F, llamada *función de disipación de Rayleigh,* definida por

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2), \tag{1-67}$$

donde la suma se extiende a todas las partículas del sistema. De esta definición se desprende que

$$F_{fx} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_x},$$

o, simbólicamente,

$$\mathbf{F}_f = -\nabla_v \mathcal{F}. \tag{1-68}$$

También podemos dar una interpretación física de la función de disipación. El trabajo efectuado *por* el sistema *contra* el rozamiento es

$$dW_f = -\mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v}\, dt = (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2)\, dt.$$

Por tanto, $2\mathcal{F}$ es la disipación de energía por unidad de tiempo a causa del rozamiento. La componente de la fuerza generalizada resultante de la fuerza de rozamiento vendrá, pues, dada por

$$\begin{aligned} Q_j = \sum_i \mathbf{F}_{if} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= -\sum \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \\ &= -\sum \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \text{por (1.51),} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \tag{1-69}$$

Las ecuaciones de Lagrange quedan ahora en la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \tag{1-70}$$

con lo que para obtener las ecuaciones del movimiento deberán especificarse dos funciones escalares, L y $\mathcal{F}$.

1-6 APLICACIONES SENCILLAS DE LA FORMULACIÓN LAGRANGIANA

En los apartados anteriores hemos visto que en el caso de sistemas en donde podamos definir una lagrangiana, es decir, sistemas holonomos con fuerzas aplicadas que deriven de un potencial ordinario o generalizado y ligaduras que no trabajen, tenemos una manera muy conveniente de establecer las ecuaciones del movimiento. A la formulación lagrangiana nos llevó el deseo de eliminar de las ecuaciones del movimiento las fuerzas de ligadura y al conseguir este fin hemos obtenido otros muchos beneficios. Al establecer la forma original de las ecuaciones del movimiento, ecuaciones (1-19), es necesario trabajar con muchos *vectores* fuerza y aceleración. Con el método de Lagrange sólo hemos de tra-

bajar con dos funciones *escalares*, T y V, lo cual simplifica mucho el problema. Podemos dar ahora un método rutinario inmediato para resolver todos los problemas de Mecánica a los que se pueda aplicar la formulación de Lagrange. Sólo hay que escribir T y V en coordenadas generalizadas, formar L a partir de aquéllas y sustituir en (1-57) para obtener las ecuaciones del movimiento. La necesaria transformación de T y V de coordenadas cartesianas a coordenadas generalizadas se obtiene aplicando las ecuaciones de transformación (1-38) y (1-46). Así, T viene dada en general por

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 .$$

Está claro que al desarrollar, la expresión de T en coordenadas generalizadas tendrá la forma

$$T = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \tag{1-71}$$

donde M_0, M_j, M_{jk} son funciones definidas de las $\mathbf{r}$ y t y por tanto de las q y t. En realidad, comparando se ve que

$$M_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 ,$$

$$M_j = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} , \tag{1-72}$$

y

$$M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} .$$

Por tanto, la energía cinética de un sistema puede siempre escribirse en forma de suma de tres funciones homogéneas de las velocidades generalizadas,

$$T = T_0 + T_1 + T_2 , \tag{1-73}$$

donde T_0 es independiente de las velocidades generalizadas, T_1 es lineal en las velocidades y T_2 es cuadrática en las velocidades. Si las ecuaciones de transformación no con-

tienen explícitamente el tiempo, cosa que puede ocurrir cuando las ligaduras sean independientes del tiempo (esclerónomas), tan sólo el último término de la ecuación (1-71) no se anulará y T será siempre una forma cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas.

Vamos a considerar ejemplos sencillos de este procedimiento:

1. Partícula única en el espacio
   a. Coordenadas cartesianas
   b. Coordenadas polares planas
2. Máquina de Atwood
3. Ligadura dependiente del tiempo —cuenta que desliza por un alambre en rotación

1. (a) *Movimiento de una partícula: utilizando coordenadas cartesianas.* Las fuerzas generalizadas necesarias en la ecuación (1-53) son, evidentemente, F_x, F_y y F_z. Luego

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

y las ecuaciones del movimiento son

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z. \tag{1-74}$$

Hemos vuelto a las ecuaciones del movimiento de Newton.

(b) *Movimiento de una partícula: utilizando coordenadas polares planas.* Aquí debemos expresar T en función de $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$. Las ecuaciones de transformación, es decir, las ecuaciones (1-38), serán en este caso

$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

En analogía con (1-46), las velocidades vienen dadas por

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta.$$

La energía cinética $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ se reducirá formalmente a

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2). \tag{1-75}$$

Se obtiene otra deducción de la ecuación (1-75) dándonos cuenta de que las componentes polares planas de la velocidad son $\dot{r}$ a lo largo de **r** y $r\dot{\theta}$ según la dirección perpendicular a r, definida por el vector unitario **n**. Por tanto, el cuadrado de la velocidad expresado en coordenadas polares será simplemente $\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$. Las componentes de la fuerza generalizada se pueden obtener a partir de la definición, ecuación (1-49),

$$Q_r = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = F_r,$$

$$Q_\theta = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{F} \cdot r\mathbf{n} = rF_\theta,$$

la que la derivada de **r** respecto a θ es, por la definición de derivada, un vector de la dirección de **n** (cfr. fig. 1-6). Hay dos coordenadas generalizadas y por tanto dos ecuaciones de Lagrange. Las derivadas que aparecen en la ecuación de r son

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r},$$

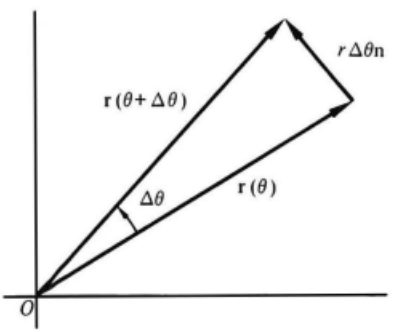


FIGURA 1-6
Derivada de **r** respecto a θ.

y la propia ecuación es

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r,$$

en donde el segundo término es la aceleración centrípeta. Para la ecuación de θ tenemos las derivadas

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta},$$

con lo que la ecuación queda en la forma

$$\frac{d}{dt}(mr^2\ddot{\theta}) = mr^2\dot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta.$$

Observemos que el primer miembro es la derivada respecto al tiempo del momento cinético y el segundo es exactamente el momento aplicado, con lo que no hemos hecho más que volver a deducir la ecuación (1-26).

2. *Máquina de Atwood* —ejemplo de sistema conservativo con ligaduras holonomas y esclerónomas (la polea se supone sin rozamiento y sin masa). Claramente, sólo hay una coordenada independiente x, estando determinada la posición del otro peso por la ligadura de que la longitud de la cuerda entre ellos es l. La energía potencial es

$$V = -M_1gx - M_2g(l - x),$$

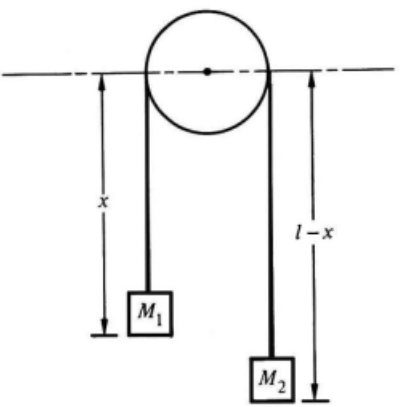


FIGURA 1-7
Máquina de Atwood

mientras que la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2.$$

Combinando ambas, la lagrangiana tiene la forma

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g(l - x).$$

Sólo hay una ecuación del movimiento, que entraña las derivadas

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x},$$

con lo que tendremos

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2)g,$$

o sea

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g,$$

que es el conocido resultado que se obtiene por medios más elementales. Este problema trivial pone de manifiesto que las fuerzas de ligadura —en este caso la tensión de la cuerda— no aparecen en ninguna parte en la formulación de Lagrange. Por la misma razón no se podrá hallar la tensión de la cuerda por el método de Lagrange.

3. *Cuenta que se desliza por un alambre en rotación uniforme en un espacio exento de fuerzas.* El alambre es recto y gira uniformemente alrededor de un eje fijo perpendicular al alambre. Se ha elegido este ejemplo como ilustración sencilla de ligadura que depende del tiempo, con lo que las ecuaciones de transformación contienen explícitamente el tiempo:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\omega t, \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\omega t. \end{aligned} \qquad \omega = \text{velocidad angular de rotación.}$$

Aun cuando podemos encontrar T (aquí lo mismo que L) por el mismo procedimiento utilizado para obtener (1-71), es más sencillo asumir directamente (1-75), expresando la

ligadura mediante la relación $\dot{\theta} = \omega$:

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

Notemos que T no es función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas porque hay un término adicional que no contiene $\dot{r}$. La ecuación del movimiento será

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0$$

o sea

$$\ddot{r} = r\omega^2,$$

que es el conocido resultado de que la cuenta se mueve hacia afuera a causa de la aceleración centrípeta. De nuevo, el método no puede darnos la fuerza de ligadura que mantiene la cuenta en el alambre.

REFERENCIAS SUGERIDAS*

K. R. SYMON, *Mechanics.* Excelente texto de nivel intermedio más detallado de lo que es usual, que puede utilizarse con provecho como preliminar y a menudo como complemento de nuestro libro. Para la materia de este capítulo, léase con atención la discusión referente a los teoremas de conservación y los sistemas de masa variable (tales como los cohetes) en el Capítulo 4 y la consideración extensiva de las ligaduras en el Capítulo 9.

W. HAUSER, *Introduction to the Principles of Mechanics.* Otro texto de nivel intermedio con muchos puntos de vista recientes y originales. A destacar la discusión de las ecuaciones de Lagrange del movimiento, en la forma de la ecuación (1-53), como ecuaciones de Newton del movimiento en un espacio curvilíneo de coordenadas generalizadas.

C. W. KILMISTER y J. E. REEVE, *Rational Mechanics.* Mecánica a nivel intermedio presentada con gran aparato matemático y destinada a estudiantes de Matemáticas. Particularmente interesante es la extensa discusión acerca de las ligaduras y el intento simplificado de formulación axiomática de los conceptos axiomáticos de la Mecánica.

C. LANCZOS, *The Variational Principles of Mechanics.* De contenido mucho más amplio que el que se desprende del título, este libro es en realidad una revisión de toda la Mecánica que hace hincapié en las bases de las distintas formulaciones. Contiene muchas notas históricas de importancia.

---

* Por conveniencia, las referencias al final de cada capítulo se consignan solamente con un título corto. La descripción bibliográfica completa se encuentra en la bibliografía al final del libro.

W. F. OSGOOD, *Mechanics.* Aun cuando se publicó hace tiempo, este libro sigue valiendo la pena. Los cinco primeros capítulos constituyen una introducción elemental al tema que se saborea deliciosamente gracias a la larga experiencia pedagógica del autor. En este aspecto, la atención del lector debe dirigirse especialmente a la página 102.

E. MACH, *The Science of Mechanics.* Análisis y crítica clásicos de los conceptos fundamentales de la Mecánica clásica. En sus ediciones anteriores, este libro hizo mucho para despejar filosóficamente el camino a la teoría de la Relatividad.

R. B. LINDSAY y H. MARGENAU, *Foundations of Physics.* El Capítulo 3 contiene un tratamiento claro de los fundamentos de la Mecánica clásica. Este libro, junto con el trabajo de Mach, puede ser un excelente punto de partida para una ulterior lectura de la naturaleza de las ideas básicas que lleva consigo la Mecánica.

P. W. BRIDGMAN, «Significance of the Mach Principle», *American Journal of Physics* **29**, 32-36, Enero 1961. Este artículo estudia por qué y hasta qué punto el sistema de referencia de las estrellas «fijas» puede tomarse como definidor operativamente de un sistema inercial.

C. TRUESDELL, *Essays in the History of Mechanics.* El estilo es muy personal y vigoroso, tolerante sin contradicción. Pero estos ensayos están impregnados de un sentido histórico intenso y apoyados por una profunda erudición. Tiene particular interés el capítulo «¿De dónde la ley del momento de la cantidad de movimiento?» que describe el desarrollo histórico de los distintos teoremas de conservación del momento cinético. Gran parte del mismo punto de vista, con mayor detalle matemático y haciendo hincapié en los sistemas continuos, se da en el apartado 196 de la referencia siguiente.

C. TRUESDELL y R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories,* libro de 567 páginas que forma parte del Vol. 3/1, *Encyclopedia of Physics.* Incidentalmente, la Bibliografía P, p. 788 y siguientes, de esta última obra, proporciona un conjunto de referencias (hasta 1957) acerca del tratamiento axiomático formal de la Mecánica.

E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics.* Tratado conocido que presenta un tratamiento exhaustivo de la Mecánica analítica desde los puntos de vista antiguos. El desarrollo está marcado, lamentablemente, por un desprecio aparente de los diagramas (de los cuales sólo hay cuatro en todo el libro) y de la notación vectorial; y por un cariño hacia el tipo de problemas de Mecánica pedantes que hicieron famoso los exámenes del Cambridge Tripos. Sin embargo, permanece una fuente prácticamente única de discusión de muchos temas especializados. Para este capítulo haremos referencia principalmente al Capítulo II, especialmente el apartado 31, que trata los potenciales dependientes de la velocidad. En los apartados 92-94 del Capítulo VIII se trata la función de disipación.

LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound.* En el Capítulo IV, del Vol. I de este tratado clásico se introduce la función de disipación.

EJERCICIOS

1. Un núcleo, inicialmente en reposo, se desintegra radiactivamente emitiendo un electrón de cantidad de movimiento 1,73 MeV/c y perpendicularmente a la dirección del electrón, un neutrino de cantidad de movimiento 1,00 MeV/c. (El MeV (millón de electrón-volt) es una unidad de energía, utilizada en Física moderna, igual a $1{,}60 \times 10^{-12}$ erg. Correspondientemente, el MeV/c es una unidad de cantidad de movimiento igual a $5{,}34 \times 10^{-23}$ gm-cm/s.) ¿En qué dirección retrocede el núcleo? ¿Cuál es su cantidad de movimiento en MeV/c? Si la masa del núcleo residual es $3{,}90 \times 10^{-22}$ g, ¿cuál será su energía cinética en electrón-volt?

2. La *velocidad de escape* de una partícula de la Tierra es la mínima velocidad que debe tener en la superficie terrestre para que la partícula pueda escapar del campo gravitatorio terrestre. Si se desprecia la resistencia de la atmósfera, el sistema es conservativo. A partir del teorema de conservación de la suma de las energías cinética y potencial, demostrar que la velocidad de escape para la Tierra, ignorando la presencia de la Luna, es de 11,2 km/s.

3. Los cohetes son impulsados a causa de la cantidad de movimiento de los gases expulsados por la cola. Como éstos surgen de la reacción de los combustibles que lleva el cohete, la masa de éste no es constante sino que disminuye a medida que se gasta combustible. Demostrar que la ecuación del movimiento para un cohete que se proyecta verticalmente hacia arriba en un campo gravitatorio uniforme, despreciando la resistencia de la atmósfera, es

$$m\frac{dv}{dt} = -v'\frac{dm}{dt} - mg,$$

donde m es la masa del cohete y v' es la velocidad de los gases expulsados relativa al cohete. Integrar esta ecuación para obtener v en función de m, suponiendo una pérdida de masa por unidad de tiempo, constante. Demostrar, para un cohete que parte inicialmente del reposo, con v' igual a 2075 m/s y una pérdida de masa por segundo igual a 1/60 de la masa inicial, que para alcanzar la velocidad de escape el cociente entre el peso del combustible y el del cohete vacío debe valer casi 300.

4. Demostrar que para una partícula de masa constante, la ecuación del movimiento implica la siguiente ecuación diferencial para la energía cinética:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

mientras que si la masa varía con el tiempo, la ecuación correspondiente es

$$\frac{d(mT)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{p}.$$

5. Demostrar que la magnitud R del vector de posición del centro de masa trazado a partir de un origen arbitrario viene dada por la ecuación

$$M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2.$$

6. Supongamos que se sabe que un sistema de dos partículas obedece a las ecuaciones del movimiento (1-22) y (1-26). Demostrar, a partir de las ecuaciones del movimiento de las partículas individuales que las fuerzas internas entre partículas satisfacen las leyes débil y fuerte de acción y reacción. El razonamiento puede generalizarse a un sistema con un número arbitrario de partículas, proporcionando así el inverso de los razonamientos que conducen a las ecuaciones (1-22) y (1-26).

7. Las ecuaciones de ligadura del disco rodante, ecuaciones (1-39), son casos particulares de ecuaciones diferenciales lineales de ligadura de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i = 0.$$

Una condición de ligadura de este tipo será holonoma solamente si puede encontrarse una función integrante $f(x_1,\ldots,x_n)$ que la convierta en diferencial exacta. Claramente, la función debe ser tal que

$$\frac{\partial(fg_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(fg_j)}{\partial x_i}$$

para toda $i \neq j$. Demostrar que no se puede encontrar un tal factor integrante para una y otra de las ecuaciones (1-39).

8. Dos ruedas de radio a se montan en los extremos de un eje común de longitud b de tal manera que las ruedas giren independientemente. La combinación total rueda sin deslizar sobre un plano. Demostrar que hay dos ecuaciones de ligadura no holonomas,

$$\cos\theta\, dx + \operatorname{sen}\theta\, dy = 0,$$

$$\operatorname{sen}\theta\ \mathrm{dx} - \cos\theta\, dy = a(d\phi + d\phi'),$$

(donde θ, ϕ y ϕ' tienen significados análogos a los del problema del disco único vertical y (x,y) son las coordenadas de un punto del eje equidistante de las dos ruedas) y una ecuación de ligadura holonoma,

$$0 = C - \frac{a}{b}(\phi - \phi'),$$

donde C es constante.

9. Una partícula se mueve en el plano x-y bajo la acción de una ligadura consistente en que su vector velocidad está siempre dirigido hacia un punto del eje x cuya abscisa es una cierta función dada del tiempo $f(t)$. Demostrar que para $f(t)$ derivable, pero arbitraria por lo demás, la ligadura es no holonoma.

10. Dos puntos de masa m están unidos por una varilla rígida y sin peso de longitud l, el punto medio de la cual está obligado a moverse sobre una circunferencia de radio a. Escribir la energía cinética en coordenadas generalizadas.

11. Demostrar que las ecuaciones de Lagrange de la forma (1-53) se pueden escribir también en la forma siguiente:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

A esto se le da a veces el nombre de forma de *Nielsen* de las ecuaciones de Lagrange.

12. Un punto material se mueve por el espacio bajo la influencia de una fuerza derivable de un potencial generalizado de la forma

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = V(r) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L},$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición trazado desde un punto fijo, $\mathbf{L}$ es el momento cinético respecto a dicho punto y $\boldsymbol{\sigma}$ es un vector fijo en el espacio.

a) Hallar las componentes de la fuerza que se ejerce sobre la partícula en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares esféricas, basándose en la ecuación (1-58).

b) Demostrar que las componentes en los dos sistemas de coordenadas están relacionadas entre sí como en la ecuación (1-49).

c) Obtener las ecuaciones del movimiento en coordenadas polares esféricas.

13. Una partícula se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza, dirigida hacia un centro de fuerzas, cuya magnitud es

$$F = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2}\right),$$

donde r es la distancia de la partícula al centro de fuerzas. Hallar el potencial generalizado que da lugar a dicha fuerza y a partir de él, la lagrangiana para el movimiento en un plano. (La expresión de F representa la fuerza entre dos cargas en la Electrodinámica de Weber.)

14. Si es L una lagrangiana para un sistema de n grados de libertad que satisfaga las ecuaciones de Lagrange, demostrar por sustitución directa que

$$L' = L + \frac{dF(q_1, \ldots, q_n, t)}{dt}$$

también satisface a las ecuaciones de Lagrange, donde F es una función arbitraria, pero derivable, de sus argumentos.

15. Sea $q_1,\ldots,q_n$ un sistema de coordenadas generalizadas independientes para un sistema de n grados de libertad, con una lagrangiana $L(q,\dot{q},t)$. Supongamos que lo transformamos en otro sistema de coordenadas independientes $s_1,\ldots,s_n$ por medio de ecuaciones de transformación

$$q_i = q_i(s_1, \ldots, s_n, t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(A una tal transformación se le da el nombre de *transformación de punto*.) Demostrar que si se expresa la lagrangiana en función de s_j, $\dot{s}_j$ y t mediante las ecuaciones de transformación, L satisfará las ecuaciones de Lagrange respecto a las coordenadas s:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0.$$

Dicho de otro modo, la forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo una transformación de punto.

16. Una lagrangiana para un sistema físico particular se puede escribir en la forma

$$L' = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{K}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

donde a, b y c son constantes arbitrarias pero sometidas a la condición $b^2 - ac \neq 0$. ¿Cuáles son las ecuaciones del movimiento? Examinar particularmente los dos casos $a = 0 = c$ y $b = 0, c = -a$. ¿Cuál es el sistema físico descrito por la anterior lagrangiana? Demostrar que la lagrangiana usual para este sistema definida por la ecuación (1-56) está relacionada con L' por una transformación de punto (cfr. Ejercicio 15). ¿Cuál es el significado de la condición impuesta al valor de $b^2 - ac$?

17. Obtener las ecuaciones de Lagrange para el movimiento de un péndulo esférico, es decir, una masa puntual suspendida de una varilla rígida sin peso.

18. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión de tal manera que tiene la lagrangiana

$$L = \frac{m^2\dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2V(x) - V^2(x),$$

donde V es una cierta función derivable de x. Hallar la ecuación del movimiento para $x(t)$ y describir la naturaleza física del sistema basándonos en esta ecuación.

19. Dos puntos materiales de masa m_1 y m_2 están unidos por un hilo que pasa por un agujero practicado en una mesa lisa de manera que m_1 se apoye sobre la superficie de la mesa y m_2 cuelgue suspendido del hilo. Suponiendo que m_2 sólo se mueva a lo largo de una recta vertical, ¿cuáles son las coordenadas generalizadas del sistema? Escribir las ecuaciones de Lagrange del sistema y si es posible, estudiar el significado físico que puede tener cada una de ellas. Reducir el problema a una sola ecuación diferencial de segundo orden y obtener una integral primera de la ecuación. ¿Cuál es su significado físico? (Considerar el movimiento solamente mientras ni m_1 ni m_2 atraviesen el agujero.)

20. Obtener la Lagrangiana y las ecuaciones del movimiento para el péndulo doble representado en la figura 1-4, en donde las longitudes de los péndulos son l_1 y l_2 y las masas correspondientes son m_1 y m_2.

21. El campo electromagnético es invariante ante una transformación de los potenciales escalar y vector dada por

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi(\mathbf{r}, t),$$

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

donde ψ es arbitraria (pero derivable). ¿Qué efecto tendrá esta transformación sobre la lagrangiana de una partícula que se mueva en un campo electromagnético? ¿Se ve afectado el movimiento?

22. Obtener la ecuación del movimiento de una partícula que caiga verticalmente bajo la influencia de la gravedad cuando estén presentes fuerzas de rozamiento que se obtengan de una función de disipación $\frac{1}{2}kv^2$. Integrar la ecuación para obtener la velocidad en función del tiempo y demostrar que la velocidad máxima posible para una caída a partir del reposo es $v = mg/k$.

Capítulo 2

Principios variacionales y ecuaciones de Lagrange

2-1 PRINCIPIO DE HAMILTON

La deducción de las ecuaciones de Lagrange que hemos presentado en el capítulo anterior partía de considerar el estado instantáneo del sistema y pequeños desplazamientos virtuales respecto al estado instantáneo, es decir, partía de un «principio diferencial» como el principio de D'Alembert. También pueden obtenerse las ecuaciones de Lagrange a partir de un principio que considere el movimiento entero del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 y pequeñas variaciones virtuales del movimiento entero respecto al movimiento real. A un principio de esta naturaleza le llamaremos «principio integral».

Antes de presentar el principio integral, deberemos enunciar con un lenguaje más preciso qué queremos significar con la frase «movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2». La configuración instantánea del sistema viene descrita por los valores de las n coordenadas generalizadas $q_1 ... q_n$ y corresponde a un punto particular en un hiperespacio cartesiano en el cual las q forman los n ejes de coordenadas. Este espacio de n dimensiones se conoce, pues, por el nombre de espacio de las configuraciones. Al ir transcurriendo el tiempo, cambia el estado del sistema y el punto representativo del sistema se mueve en el espacio de las configuraciones describiendo una curva llamada «camino del movimiento del sistema». El «movimiento del sistema» se refiere, pues, al movimiento del punto representativo del sistema a lo largo de su camino en el *espacio de las configuraciones*. El tiempo se puede considerar formalmente como parámetro de la curva; a cada punto del camino se asocia uno o más valores del tiempo. Debe hacerse resaltar que el espacio de las configuraciones no tiene necesariamente ninguna relación con el espacio físico tridimensional, al igual que las coordenadas generalizadas no son necesariamente coordenadas de posición. El camino del movimiento en el espacio de las configuraciones no tendrá necesariamente ninguna semejanza con el camino que siga una partícula real cualquiera en el espacio; cada punto del camino del movimiento representa la configuración *entera* del sistema en un cierto instante dado.

El *principio de Hamilton* es un principio integral que describe el movimiento de los sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas (salvo las de ligadura) pueden derivar de un potencial escalar generalizado que puede ser función de las coordenadas, velocidades y del tiempo. Siguiendo la terminología ideada por C. Lanczos, a dichos sistemas les llamaremos *monógenos.** Cuando el potencial es función explícita de las coordenadas de posición solamente, el sistema monógeno será también conservativo (cfr. § 1-2). Para los sistemas monógenos, el principio de Hamilton se enuncia diciendo que *el movimiento del sistema entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 es tal que la integral curvilínea*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{2-1}$$

*donde $L = T - V$, tiene un valor estacionario para el camino del movimiento correcto.**

Es decir, de entre todos los caminos posibles por los cuales el punto representativo del sistema podría ir de su posición en el instante t_1 a su posición en el instante t_2, recorrerá en la realidad el camino para el cual el valor de la integral (2-1) sea estacionario. Por «valor estacionario» de una integral curvilínea queremos significar que, a lo largo del camino dado, la integral tiene el mismo valor, salvo infinitésimos de primer orden, que a lo largo de todos los caminos vecinos (es decir, los que difieren de él en desplazamientos infinitesimales). (Cfr. fig. 2-1.) La noción de valor estacionario de una integral curvilínea corresponde, pues, en teoría de funciones ordinaria, a la anulación de la primera derivada.

Podemos resumir el principio de Hamilton diciendo que el movimiento es tal que la *variación* de la integral curvilínea I para t_1 y t_2 fijos, es nula:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\,dt = 0. \tag{2-2}$$

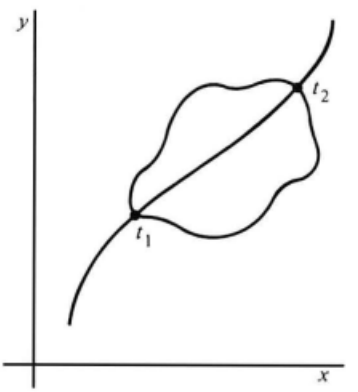


FIGURA 2-1
Camino del punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones.

* C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4.ª ed. (Toronto: U. of Toronto Press, 1970), p. 30. El término significa que todas las fuerzas se generan a partir de una sola función.

Cuando el sistema de ligaduras sea holonomo, el principio de Hamilton, ecuación (2-2), será condición necesaria y suficiente para las ecuaciones de Lagrange, ecuaciones (1-57). Por tanto, puede demostrarse que el principio de Hamilton se deduce directamente de las ecuaciones de Lagrange (crf. Whittaker, *Analytical Dynamics,* 4.ª ed., p. 245). En vez de eso, vamos a demostrar el recíproco, o sea, que las ecuaciones de Lagrange se deducen del principio de Hamilton. Consideraremos que este teorema es el más importante. Que el principio de Hamilton sea condición suficiente para deducir las ecuaciones del movimiento, nos permite construir la Mecánica de sistemas monógenos tomando como base el principio de Hamilton en vez de las leyes de Newton del movimiento. Esta formulación presenta ventajas; por ejemplo, como la integral I es evidentemente invariante al sistema de coordenadas generalizadas utilizadas para expresar L, las ecuaciones del movimiento deben tener siempre la forma de Lagrange independientemente de cómo se transformen las coordenadas generalizadas. Más importante, la formulación en función de un principio variacional es el camino a seguir cuando intentemos describir sistemas aparentemente no mecánicos con las formas matemáticas de la Mecánica clásica, como sucede en la teoría de campos.

2-2 ALGUNAS TÉCNICAS DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

Antes de demostrar que las ecuaciones de Lagrange se deducen de (2-2), debemos hacer una digresión acerca de los métodos del cálculo de variaciones, ya que uno de los principales problemas de este cálculo es hallar la curva para la cual una integral curvilínea dada tenga un valor estacionario.

Consideremos primeramente el problema en forma esencialmente unidimensional: tenemos una función $f(y, \dot{y}, x)$ definida sobre un camino $y = y(x)$ entre dos valores x_1 y x_2, donde $\dot{y}$ es la derivada de y respecto a x. Queremos encontrar un camino particular $y(x)$ tal que la integral curvilínea J de la función f entre x_1 y x_2,

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx},$$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx, \tag{2-3}$$

tenga un valor estacionario relativo a los caminos que difiera infinitesimalmente de la función correcta $y(x)$. La variable x desempeña aquí el papel de parámetro t y sólo consideramos caminos variados para los cuales $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. (Cfr. fig. 2-2). Nótese que el diagrama *no* representa el espacio de las configuraciones. En el espacio de la configuración unidimensional tanto el camino correcto como los variados son el segmento rectilíneo que une y_1 con y_2; los caminos sólo difieren en la relación funcional entre y y x).

* A la cantidad I se le da el nombre de *acción* o de *integral de acción.*

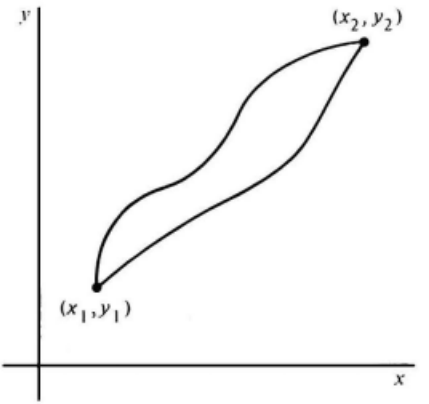


FIGURA 2-2
Caminos variados en el problema de extremo unidimensional.

Planteemos el problema en una forma que nos permita utilizar los métodos conocidos del cálculo diferencial para hallar los puntos estacionarios de una función. Como J debe tener un valor estacionario para el camino correcto relativo a *todo* camino próximo, la variación debe ser cero relativa a *algún* conjunto particular de caminos vecinos señalados por un parámetro infinitesimal α. Tal conjunto de caminos podríamos representarlo por $y(x,\alpha)$, representando $y(x,0)$ al camino correcto. Por ejemplo, si seleccionamos una función cualquiera $\eta(x)$ que se anule en $x = x_1$ y $x = x_2$, un conjunto posible de caminos variados sería

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x). \tag{2-4}$$

Por razón de sencillez, supongamos que tanto el camino correcto $y(x)$ como la función auxiliar $\eta(x)$ sean funciones continuas y sin singularidades entre x_1 y x_2, con primera y segunda derivada continuas en el mismo intervalo. Para cualquiera de tales familias de curvas paramétricas, la J de la ecuación (2-3) será también función de α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x)\, dx, \tag{2-5}$$

y la condición de obtención de un punto estacionario es la conocida de que

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0. \tag{2-6}$$

Por los métodos usuales de derivación bajo el signo integral encontramos que

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx. \tag{2-7}$$

Consideremos la segunda de estas integrales:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial \alpha} dx.$$

Integrando por partes, la integral queda en la forma

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial \alpha} dx = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \tag{2-8}$$

Las condiciones impuestas a todas las curvas variadas son que pasen por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y por tanto, en x_1 y x_2 se anulará la derivada parcial de y respecto a α. Por tanto, el primer término de (2-8) se anula y la ecuación (2-7) se reduce a

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx.$$

La condición de valor estacionario (ec. 2-6) es, pues, equivalente a la ecuación

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 dx = 0. \tag{2-9}$$

Ahora bien, la derivada parcial de y respecto a α que aparece en la ecuación (2-9) es una función de x que es arbitraria salvo en lo que respecta a la continuidad y condiciones en los puntos extremos. Por ejemplo, para la familia paramétrica particular de caminos variados dada por la ecuación (2-4), es la función arbitraria $\eta(x)$. Podemos, pues, aplicar a la ecuación (2-9) el llamado «lema fundamental» del cálculo de variaciones que dice que si

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)\, dx = 0 \tag{2-10}$$

para todas las funciones arbitrarias $\eta(x)$ continuas hasta la segunda derivada, $M(x)$ deberá ser idénticamente nula en el intervalo (x_1, x_2). Aun cuando la demostración matemática formal del lema se puede encontrar en los textos de cálculo de variaciones citados en las referencias, la validez del lema es fácil de ver intuitivamente. Podemos imaginar que construimos una función η que sea positiva en la inmediata proximidad de un punto cualquiera elegido en el intervalo y nula en el resto. La ecuación (2-10) puede entonces ser válida solamente si $M(x)$ se anula en dicho punto elegido (arbitrariamente), lo que demuestra que M debe ser nula en todo el intervalo. De la ecuación (2-9) y del lema fundamental se deduce, por tanto, que J sólo puede tener un valor estacionario si

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0. \tag{2-11}$$

La cantidad diferencial

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha \equiv \delta y \tag{2-12}$$

representa el apartamiento infinitesimal del camino variado respecto al camino correcto $y(x)$ en el punto x y por tanto corresponde al desplazamiento virtual introducido en el Capítulo 1 (de aquí la notación δy). Análogamente, la variación infinitesimal de J respecto al camino correcto puede designarse

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_0 d\alpha \equiv \delta J. \tag{2-13}$$

La aseveración de que J es estacionaria para el camino correcto podrá, pues, escribirse en la forma

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right\} \delta y \, dx = 0,$$

exigiendo que $y(x)$ satisfaga a la ecuación diferencial (2-11). La notación δ introducida en las ecuaciones (2-12) y (2-13) puede utilizarse como abreviatura conveniente para tratar la variación de integrales, recordando siempre que representa la manipulación de familias paramétricas de caminos variados tales como la ecuación (2-4).

Vamos a considerar algunos ejemplos sencillos de la aplicación de la ecuación (2-11) (que se asemeja claramente a una ecuación de Lagrange):

1. *Distancia más corta entre dos puntos de un plano.* En un plano, el elemento de

longitud de un arco es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

y la longitud total de toda curva que vaya del punto 1 al punto 2 es

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

La condición de que la curva constituya el camino más corto es que I sea mínima. Es esto un ejemplo de problema de extremo expresado por la ecuación (2-3), siendo

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

Sustituyendo en (2-11) siendo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}},$$

tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0$$

o sea

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c,$$

donde c es constante. Esta solución sólo puede ser válida si

$$\dot{y} = a$$

donde a es una constante relacionada con c por

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Pero esto es, evidentemente, la ecuación de una recta,

$$y = ax + b,$$

donde b es otra constante de integración. Estrictamente, sólo hemos demostrado que la recta constituye un camino extremo, si bien en este problema es evidente que es también un mínimo. Las constantes de integración a y b se determinan mediante la condición de que la curva pase por los dos puntos terminales (x_1, y_1), (x_2, y_2).

De manera análoga podríamos obtener la distancia más corta entre dos puntos sobre una superficie esférica, escribiendo la longitud del arco sobre la superficie esférica, en función de las coordenadas angulares de posición sobre dicha superficie. En general, a las curvas que dan la distancia más corta entre dos puntos sobre una superficie dada se les da el nombre de *geodésicas* de dicha superficie.

2. *Superficie de revolución mínima.* Supongamos que formamos una superficie de revolución tomando una curva que pase por dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y haciéndola girar alrededor del eje y (cfr. fig. 2-3). El problema estriba en hallar la curva para la cual es mínima el área de la superficie engendrada. El área de una franja de la superficie es $2\pi x\, ds = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx$ y el área total es

$$2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx.$$

El extremo de esta integral viene dado de nuevo por (2-11) donde

$$f = x\sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

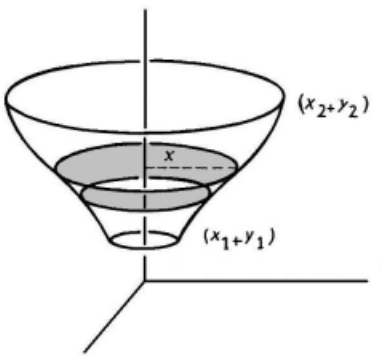


FIGURA 2-3
Superficie de revolución de área mínima.

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

En este caso, la ecuación (2-11) queda en la forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0$$

o sea

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = a,$$

donde a es una constante de integración evidentemente menor que el valor mínimo de x. Elevando al cuadrado ambos miembros y reduciendo términos semejantes, tenemos

$$\dot{y}^2(x^2 - a^2) = a^2$$

o despejando,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

La integral general de esta ecuación diferencial, a la luz de la naturaleza de a, es

$$y = a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \operatorname{arc\,cosh}\frac{x}{a} + b$$

o sea

$$x = a\cosh\frac{y - b}{a},$$

que es la ecuación de la catenaria. De nuevo, las constantes de integración a y b se determinan, en principio, por los requisitos de que la curva pase por los dos puntos terminales dados. Sin embargo, debemos advertir que cuando se examina en detalle la naturaleza de la solución resulta ser mucho más complicado de lo que sugieren estas consideraciones. Para ciertos pares de puntos terminales se podrán encontrar constantes de integración unívocas a y b. Pero para otros pares de puntos terminales, resultan *dos* catenarias solución, mientras que en otras regiones no pueden hallarse valores posibles de a y b. Además, debe recordarse que la ecuación (2-11) representa una condición para hallar curvas $y(x)$, continuas hasta las segundas derivadas, que hagan estacionaria a la integral. Las soluciones catenaria no representan siempre valores mínimos, sino que pueden dar «puntos de inflexión». Para ciertas combinaciones de puntos terminales, el mínimo absoluto de la superficie de revolución lo proporciona una curva compuesta de segmentos rectilíneos —desde el primer punto terminal paralelo al eje x hasta alcanzar el eje y, luego a lo largo del eje y hasta el punto $(0, y_2)$ y después en línea recta hasta el segundo punto terminal. Tal curva tiene primeras derivadas discontinuas y no podemos esperar encontrarla como solución de la ecuación (2-11). Este ejemplo es bueno para poner de relieve las restricciones que rodean a la derivacion y el significado de la condición estacionaria. Encontraremos más detalles en algunos ejercicios y en los textos citados de cálculo de variaciones.

3. *El problema de la braquistócrona*. Este conocido problema consiste en hallar la curva que une dos puntos, a lo largo de la cual una partícula que parte del reposo bajo la influencia de la gravedad pasa del punto más alto al más bajo en un tiempo mínimo.

Si es v la celeridad a lo largo de la curva, el tiempo que se tarda en caer un arco de longitud ds será ds/v y el problema se reduce a hallar un mínimo de la integral

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

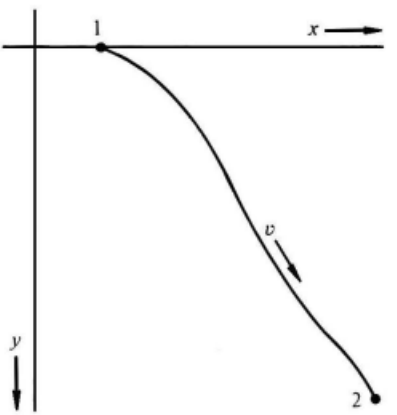


FIGURA 2-4
Braquistócrona.

Si se mide y hacia abajo desde el punto de partida del reposo, el teorema de conservación de la energía de la partícula se puede escribir en la forma

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgy$$

o sea

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Entonces, la expresión de t_{12} será

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx,$$

y f se identifica por

$$f = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}}.$$

La integración de la ecuación (2-11) con esta forma de f es inmediata y se deja como ejercicio al final del capítulo. El problema de la braquistócrona es famoso en la historia de la Matemática, ya que fue el análisis de este problema el que llevó a Juan Bernoulli al fundamento formal de cálculo de variaciones.

2-3 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAGRANGE A PARTIR DEL PRINCIPIO DE HAMILTON

El problema fundamental del cálculo de variaciones se generaliza fácilmente al caso en que f sea función de varias variables independientes y_i y de sus derivadas $\dot{y}_i$. (Desde luego, todas esas cantidades se consideran funciones de la variable paramétrica x). Entonces, se obtiene una variación de la integral J,

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x); y_2(x), \ldots, \dot{y}_1(x); \dot{y}_2(x), \ldots, x)\,dx, \tag{2 14}$$

como antes, considerando J función de un parámetro α que rotula un posible conjunto de

curvas $y_i(x, \alpha)$. Así, podemos introducir α haciendo

$$\begin{aligned} y_1(x,\alpha) &= y_1(x,0) + \alpha\eta_1(x), \\ y_2(x,\alpha) &= y_2(x,0) + \alpha\eta_2(x), \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned} \tag{2-15}$$

donde $y_1(x, 0)$, $y_2(x, 0)$, etc. son las soluciones del problema de extremo (a obtener) y η_1, η_2, etc., son funciones de x independientes que se anulan en los puntos terminales y que son continuas hasta la segunda derivada, pero que por lo demás son completamente arbitrarias. El cálculo tiene lugar como antes. La variación de J se da en función de

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx. \tag{2-16}$$

De nuevo, integramos por partes la integral del segundo sumatorio de la ecuación (2-16):

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \, \partial x} dx = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx;$$

donde el primer término se anula porque todas las curvas pasan por los puntos terminales fijos. Sustituyendo en (2-16), δJ queda

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i \, dx, \tag{2-17}$$

donde, en analogía con (2-12), la variación δy_i es

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha.$$

Como las variables y son independientes, las variaciones δy_i también lo serán (p. ej., las funciones $\eta_i(x)$ serán independientes entre sí). Luego, por una ampliación evidente del lema fundamental (cfr. ec. 2-10), la condición de que δJ sea cero exige que se anulen por

separado los coeficientes de las δy_i:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2-18}$$

Las ecuaciones (2-18) representan la generalización de (2-11) apropiada para varias variables y se conocen por el nombre de *ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange.* Sus soluciones representan curvas para las cuales la variación de una integral de la forma dada en (2-14) se anula. Otras generalizaciones del problema variacional fundamental son fácilmente posibles. Así, podemos tomar f como una función de derivadas de orden superior, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, etc., que conducen a ecuaciones diferentes de la (2-18). O se puede ampliar a casos en los que haya varios parámetros x_j y la integral sea múltiple, conteniendo también f tantas derivadas variables de y_i respecto a cada uno de los parámetros x_j. Finalmente, se pueden considerar variaciones en las cuales los puntos terminales *no* se mantengan fijos.

Para los fines presentes, es suficiente lo que hemos deducido aquí, ya que la integral del principio de Hamilton,

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt \tag{2-19}$$

tiene exactamente la forma estipulada en (2-14) con las transformaciones

$$x \to t$$

$$y_i \to q_i$$

$$f(y_i, \dot{y}_i, x) \to L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Al deducir las ecuaciones (2-18) se supuso que las variables y_i eran independientes. La condición correspondiente en relación con el principio de Hamilton es que sean independientes las coordenadas generalizadas q_i, lo que exige que las ligaduras sean holonomas. Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la integral I se convierten entonces en las ecuaciones de Lagrange del movimiento,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

y hemos conseguido nuestro propósito inicial, que era demostrar que las ecuaciones de Lagrange se deducen del principio de Hamilton —para sistemas monógenos con ligaduras holonomas.

2-4 EXTENSIÓN DEL PRINCIPIO DE HAMILTON A SISTEMAS NO HOLONOMOS

El principio de Hamilton puede extenderse, al menos de manera formal, para cubrir ciertos tipos de sistemas no holonomos. Al deducir las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton o del de D'Alembert, el requisito de ligaduras holonomas no aparece hasta el último paso, cuando se consideran independientes entre si las variaciones de q_i. En el caso de sistemas no holonomos, las coordenadas generalizadas no son independientes entre sí y no es posible reducirlas más por medio de ecuaciones de ligadura de la forma $f(q_1, q_2, ..., q_n, t) = 0$. Por tanto, ya no es cierto que las q_i sean todas independientes.

Otra diferencia que hay que considerar al tratar el principio variacional es la manera en que se construyen los caminos variados. En el estudio de § 2-2 se indicó que δy (o δq) representa un desplazamiento virtual desde un punto del camino real hasta un cierto punto del camino variado cercano. Pero, con coordenadas independientes es el camino variado final el que importa y no cómo se construye. Cuando las coordenadas no son independientes, sino que están sometidas a relaciones de ligadura, resulta importante si el camino variado está construido o no por desplazamientos compatibles con las ligaduras. En particular, los desplazamientos virtuales pueden satisfacer o no, las ligaduras.

Parece, pues, que es posible un tratamiento razonablemente inmediato de los sistemas no holonomos tan sólo cuando las ecuaciones de ligadura puedan ponerse en la forma

$$\sum_k a_{lk}\, dq_k + a_{lt}\, dt = 0, \tag{2-20}$$

es decir, una relación lineal entre las *diferenciales* de las q. El índice l indica que puede haber más de una de esas ecuaciones; supondremos que hay m ecuaciones en total, es decir, $l = 1, 2, ..., m$. Observemos que los coeficientes a_{lk}, a_{lt} pueden ser funciones de las q y del tiempo.

Podríamos esperar que los caminos variados, o lo que es equivalente, los desplazamientos que construyen el camino variado, satisfagan las ligaduras de la ecuación (2-20). No obstante, se ha demostrado que no se puede construir tal camino variado* a menos que sean integrables las ecuaciones (2-20), en cuyo caso las ligaduras son verdaderamente holonomas. De todas maneras, se puede obtener un principio variacional que lleva a las ecuaciones del movimiento correctas cuando se construyan los caminos variados a partir del movimiento real mediante desplazamientos virtuales. Las ecuaciones de ligadura válidas para los desplazamientos virtuales son, entonces,

$$\sum_k a_{lk}\, \delta q_k = 0, \tag{2-21}$$

y el camino variado no satisfará, en general, a las ecuaciones (2-20).

---

* Véase, p. ej., H. Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations* (New York: Van Nostrand, 1966), Capítulo 5.

Podemos ahora utilizar las ecuaciones (2-21) para reducir los desplazamientos virtuales a los independientes. El método para eliminar estos desplazamientos virtuales sobrantes es el de los *multiplicadores indeterminados de Lagrange*. Si son válidas las ecuaciones (2-21), también será cierto que

$$\lambda_l \sum_k a_{lk}\, \delta q_k = 0, \tag{2-22}$$

donde los λ_l, $l = 1, 2, \ldots, m$ son cantidades indeterminadas, funciones en general de las coordenadas y del tiempo t. Además, el principio de Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0, \tag{2-2}$$

se supone válido para el sistema no holonomo. Siguiendo el desarrollo de § 2-3, el principio de Hamilton implica entonces que

$$\int_1^2 dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0. \tag{2-23}$$

Podemos combinar la ecuación (2-23) con las m ecuaciones de ligadura sobre los desplazamientos virtuales δq_k sumando las ecuaciones (2-22) para los valores de l e integrando el resultado respecto al tiempo entre el punto 1 y el punto 2:

$$\int_1^2 \sum_{k,l} \lambda_l a_{lk}\, \delta q_k\, dt = 0. \tag{2-24}$$

La suma de las ecuaciones (2-23) y (2-24) es entonces la relación

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0. \tag{2-25}$$

Las δq_k siguen sin ser independientes, desde luego; están ligadas por las m relaciones (2-21). Es decir, mientras se pueden elegir independientemente las $n - m$ primeras de ellas, las m últimas estarán fijas por las ecuaciones (2-21). No obstante, quedan a nuestra disposición los valores de los λ_l. Supongamos que los elegimos de manera que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0, \qquad k = n - m + 1, \ldots, n. \tag{2-26}$$

que corresponden a las ecuaciones de movimiento de las m últimas variables q_k. Determinados por (2-26) los λ_l, podemos escribir (2-25) en la forma

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0. \tag{2-27}$$

Aquí, las únicas δq_k que intervienen son las independientes. Luego se deduce que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n - m. \tag{2-28}$$

Combinando (2-26) y (2-28) tenemos finalmente el sistema completo de ecuaciones de Lagrange para sistemas no holonomos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2-29}$$

Pero esto no es todo, ya que ahora tenemos $n + m$ incógnitas, cual son las n coordenadas q_k y los m multiplicadores de Lagrange λ_l, mientras que (2-29) nos da un total de sólo n ecuaciones. Desde luego, las ecuaciones adicionales necesarias son exactamente las ecuaciones de ligadura que enlazan las q_k (ec. 2-20) con la diferencia que ahora hay que considerarlas ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\sum_k a_{lk}\dot{q}_k + a_{lt} = 0. \tag{2-30}$$

Las ecuaciones (2-30) y (2-29) juntas constituyen $n + m$ ecuaciones con $n + m$ incógnitas.

En este proceso hemos obtenido más información de la que buscábamos inicialmente. No sólo obtenemos las q_k que queríamos encontrar, sino que también obtenemos m multiplicadores λ_l. ¿Cuál es el significado físico de los λ_l? Supongamos que quitáramos las ligaduras del sistema y aplicáramos en su lugar fuerzas exteriores Q'_k de manera que mantuvieran invariado el movimiento del sistema. Las ecuaciones del movimiento permanecerían las mismas. Evidentemente, estas fuerzas aplicadas extraordinarias deben ser iguales a las fuerzas de ligadura, ya que son las fuerzas aplicadas al sistema para que se satisfagan las condiciones de ligadura. Bajo la influencia de estas fuerzas Q'_k, las

ecuaciones del movimiento son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k. \tag{2-31}$$

Pero éstas deben ser idénticas a las ecuaciones (2-29). Por tanto, podemos identificar $\Sigma\lambda_j a_{jk}$ con las Q'_k, fuerzas generalizadas de ligadura. En este tipo de problema no eliminamos en realidad las fuerzas de ligadura de la formulación y se dan como parte de la respuesta.

Aun cuando no sea evidente, la versión del principio de Hamilton que hemos adoptado para sistemas no holonomos exige también que las ligaduras no trabajen en los desplazamientos virtuales. Esto puede verse muy bien escribiendo el principio de Hamilton en la forma

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt - \delta\int_{t_1}^{t_2} U\,dt = 0.$$

Si la variación de la integral sobre el potencial generalizado se lleva a cabo por los procedimientos de § 2-3, el principio adopta la forma

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right)\right)\delta q_k\,dt;$$

o, en virtud de la ecuación (1-58),

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt = -\int_{t_1}^{t_2}\sum_k Q_k\,\delta q_k\,dt. \tag{2-32}$$

Así vestido, el principio de Hamilton dice que la diferencia de la integral temporal de la energía cinética entre dos caminos vecinos es igual a la integral temporal del trabajo efectuado en los desplazamientos virtuales entre los caminos, cambiada de signo. El trabajo que interviene es el efectuado sólo por las fuerzas que derivan del potencial generalizado. Si queremos que el mismo principio de Hamilton sea válido tanto para sistemas holonomos como no holonomos, debe exigirse que las fuerzas adicionales de ligaduras no holonomas no trabajen en los desplazamientos δq_k. Esta restricción es paralela a la condición anterior de que el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura holonoma sea también nulo (cfr. § 1-4). En la práctica, la restricción no reduce mucho las aplicaciones, ya que la mayoría de problemas en los que se usa el formalismo no

holonomo están relacionados con la rodadura sin deslizamiento, en cuyo caso es evidente que las ligaduras no trabajan.

En verdad, si se hace desde un principio la hipótesis de que no trabajan las ligaduras, los razonamientos físicos que conducen a las ecuaciones (2-31) se pueden ampliar directamente para deducir la forma completa de las ecuaciones de Lagrange no holonomas, ecuaciones (2-29). La condición de que sea cero el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura puede escribirse en la forma

$$\sum_k Q'_k \delta q_k = 0. \tag{2-33}$$

Al mismo tiempo, las ecuaciones de ligadura implican que

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, m. \tag{2-21}$$

Por tanto, la ecuación (2-33) se satisfará si las fuerzas constantes vienen dadas por

$$Q'_k = \sum_l \lambda_l a_{lk},$$

donde los λ_l son multiplicadores indeterminados (hasta ahora). El resto del tratamiento sigue las líneas dadas anteriormente a partir de las ecuaciones (2-28).*

Notemos que la ecuación (2-20) no constituye el tipo más general de ligadura no holonoma, p. ej., no incluye ecuaciones de ligadura en forma de inecuaciones. En cambio, incluye ligaduras holonomas. Una ecuación de ligadura holonoma

$$f(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) = 0 \tag{2-34}$$

es equivalente a una ecuación diferencial,

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \tag{2-35}$$

---

* En vista de lo difícil que es formular un principio variacional para sistemas no holonomos y lo relativamente fácil que es obtener directamente las ecuaciones del movimiento, es natural cuestionar la utilidad del método variacional en este caso. Por esta razón, de ahora en adelante limitaremos las discusiones de los principios variacionales y sus consecuencias a sistemas holonomos en los cuales sean independientes las coordenadas generalizadas.

que es formalmente igual a (2-20), con los coeficientes

$$a_{lk} = \frac{\partial f}{\partial q_k}, \qquad a_{lt} = \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{2-36}$$

Por tanto, el método de los multiplicadores de Lagrange se puede utilizar también para ligaduras holonomas cuando (1) sea conveniente reducir todas las q a coordenadas independientes o (2) queramos obtener las fuerzas de ligadura.

Para ilustrar el método, consideremos el siguiente ejemplo un tanto trivial —un aro que ruede sin deslizar hacia la parte baja de un plano inclinado. En este caso, la ligadura de «rodadura» es en realidad holonoma, pero este hecho no tiene importancia en nuestro estudio. En cambio, la ligadura holonoma de que el aro esté sobre el plano inclinado estará contenida implícitamente en la elección de las coordenadas generalizadas.

Las dos coordenadas generalizadas son x, θ (fig. 2-5) y la ecuación de ligadura de la rodadura es

$$r\,d\theta = dx.$$

La energía cinética podemos descomponerla en energía cinética del movimiento del centro de masa más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masa:

$$T = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2.$$

La energía potencial es

$$V = Mg(l - x)\operatorname{sen}\phi,$$

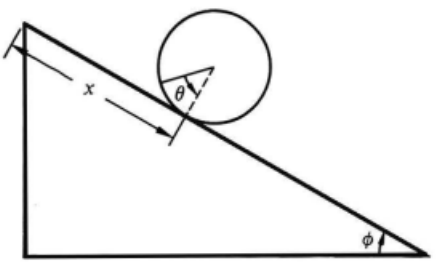


FIGURA 2-5
Aro que rueda por un plano inclinado.

donde l es la longitud del plano inclinado y la lagrangiana es

$$L = T - V.$$
$$= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{\theta}^2}{2} - Mg(l - x)\operatorname{sen}\phi.$$

Como hay una ecuación de ligadura, sólo se necesitará un multiplicador de **Lagrange** λ. Los coeficientes que aparecen en la ecuación de ligadura son

$$a_\theta = r,$$
$$a_x = -1.$$

Las dos ecuaciones de Lagrange serán, pues,

$$M\ddot{x} - Mg\operatorname{sen}\phi + \lambda = 0, \tag{2-37}$$
$$Mr^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0, \tag{2-38}$$

que junto con la ecuación de ligadura,

$$r\dot{\theta} = \dot{x}, \tag{2-39}$$

constituyen tres ecuaciones con las tres incógnitas θ, x, λ.

Derivando (2-39) respecto al tiempo, tenemos

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x}.$$

Luego, de (2-38)

$$M\ddot{x} = \lambda$$

y la (2-37) se convierte en

$$\ddot{x} = \frac{g\operatorname{sen}\phi}{2},$$

junto con

$$\lambda = \frac{Mg \operatorname{sen}\phi}{2}$$

y

$$\ddot{\theta} = \frac{g \operatorname{sen}\phi}{2r}.$$

Luego el aro rueda plano abajo con sólo la mitad de la aceleración que tendría si deslizara por un plano de rozamiento y la fuerza de rozamiento de ligadura será $\lambda = Mg$ sen $\phi/2$.

De

$$\ddot{x} = v\frac{dv}{ds},$$

se obtiene $v = \sqrt{gl \operatorname{sen}\phi}$ en la parte inferior, que también se podría haber obtenido por medios elementales.

2-5 VENTAJAS DE UNA FORMULACIÓN DE PRINCIPIO VARIACIONAL

Aun cuando vemos que es posible ampliar la formulación original del principio de Hamilton (2-2) para incluir algunas ligaduras no holonomas, prácticamente, esta formulación de la Mecánica resulta muy útil cuando para el sistema pueda establecerse una lagrangiana de coordenadas independientes. La formulación del principio variacional se ha descrito justamente como «elegante», ya que en el compacto principio de Hamilton está contenida toda la Mecánica de sistemas holonomos con fuerzas derivables de potenciales. El principio tiene además el mérito de que sólo comporta magnitudes físicas que pueden definirse sin hacer referencia a un sistema particular de coordenadas generalizadas, a saber, las energías cinética y potencial. Por tanto, la formulación es automáticamente invariante respecto a la elección de las coordenadas del sistema.

Del principio variacional de Hamilton resulta también evidente por qué la lagrangiana está definida salvo la derivada total respecto al tiempo de una función cualquiera de las coordenadas y del tiempo, tal como se indicó al final de § 1-4. La integral temporal de dicha derivada total entre los puntos 1 y 2 sólo depende de los valores de la función arbitraria en los puntos terminales. Como la variación en los puntos terminales es nula, la adición a la lagrangiana de la derivada respecto al tiempo arbitraria no afecta al comportamiento variacional de la integral.

Otra ventaja es que la formulación de Lagrange puede ampliarse fácilmente para describir sistemas que no se consideran normalmente en Dinámica —tales como el campo

elástico, el campo electromagnético, las propiedades de campo de las partículas elementales. Consideraremos más adelante algunas de estas generalizaciones, pero vamos a considerar el caso siguiente como ejemplo sencillo de su aplicación fuera del marco usual de la Mecánica.

Supongamos que tenemos un sistema para el cual exista una lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\sum_j L_j \dot{q}_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{jk \\ j\neq k}} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - \sum_j \frac{q_j^2}{2C_j} + \sum_j E_j(t)q_j \tag{2-40}$$

y una función de disipación

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_j R_j \dot{q}_j^2. \tag{2-41}$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$L_j \frac{d^2q_j}{dt^2} + \sum_{\substack{k \\ j\neq k}} M_{jk}\frac{d^2q_k}{dt^2} + R_j\frac{dq_j}{dt} + \frac{q_j}{C_j} = E_j(t). \tag{2-42}$$

Estas ecuaciones del movimiento pueden interpretarse al menos de dos maneras: Podemos decir que las q son cargas, las L_j autoinducciones, las M_{jk} inducciones mutuas, las R_j resistencias, las C_j capacidades y las E_j fem exteriores. Entonces, las ecuaciones (2-42) constituyen un sistema de ecuaciones que describe a un sistema de redes mutuamente acopladas inductivamente, p. ej., para $j = 1, 2, 3$ tendríamos tres redes del tipo representado en la figura 2-6. Por otra parte, vemos que los dos primeros términos de L juntos constituyen una función cuadrática homogénea arbitraria de las velocidades generalizadas. Siempre que las ligaduras (holonomas) del sistema sean independientes del tiempo, la energía cinética T se podrá poner en dicha forma (cfr. § 1-6). Los coeficientes L_j, M_{jk} presentan el carácter de masas —son *términos inertes*. El término siguiente de la lagrangiana corresponde exactamente a la energía potencial de un sistema de resortes —osciladores armónicos— donde las fuerzas cumplen la ley de Hooke,

$$F = -kx,$$

que da por resultado un potencial

$$V = \frac{kx^2}{2},$$